ÁLGEBRA

Junio 1994. Un aficionado a la Bolsa invirtió 2.000.000 de pesetas en acciones de tres empresas A, B y C. Al cabo de un año la empresa A pagó el 6% del dinero invertido, la B el 8% y la C el 10%. Como consecuencia de ello, el aficionado a la Bolsa cobró un total de 162.400 pesetas. Además en la empresa C invirtió el doble que en la A. Se pide:

a) Calcular cuánto invirtió en cada empresa. (Razonar la respuesta) *(7 puntos)*
b) Prescindiendo del último dato, es decir de que el aficionado invirtió en la empresa C el doble que en la A, ¿cuál sería la respuesta? *(3 puntos)*

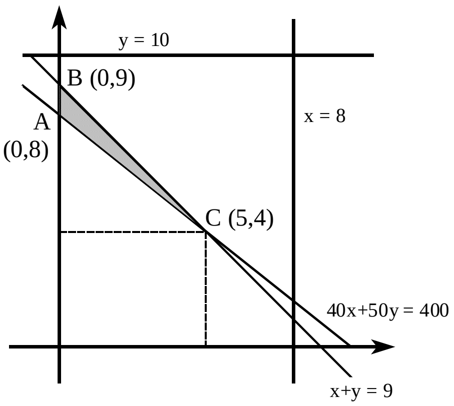
Nota: Los sistemas de ecuaciones lineales se deben resolver por el método de Gauss.

SOLUCIÓN.
a) A: 120.000 ptas ; B: 1.640.000 ptas ; C: 240.000 ptas.
b) El sistema es compatible indeterminado: A: $\lambda - 120.000$; B: $2.120.000 - 2\lambda$; C: λ

Junio 1994. Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses de 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 8.000 pesetas y el de cada uno de los pequeños 6.000 pesetas. Se quiere saber cuántos autobuses de cada clase se tiene que alquilar para que el coste del viaje sea mínimo. Para ello se pide:

a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos)*
b) Representar la región factible. *(2,5 puntos)*
c) Resolver el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x \leq 8$; $y \leq 10$; $x + y \leq 9$; $40x + 50y \geq 400$
Función objetivo: F(x,y) = 6000x + 8000y
b)



c) Solución: 5 autobuses de 40 plazas y 4 de 50 plazas.

Septiembre 1994. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular el rango de A. *(3 puntos)*
b) Discutir si existe solución y resolver, caso de que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3 puntos)

c) Cambiando una sola ecuación, convertir el sistema de ecuaciones lineales del apartado b en un sistema que tenga infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones. *(4 puntos)*

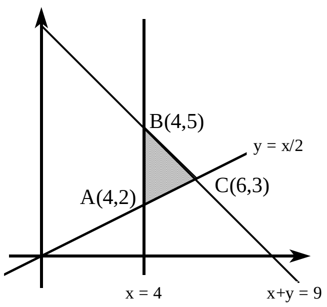
SOLUCIÓN.
a) rg A = 3 b) Solución única: x = y = z = 0 c) Basta con sustituir una ecuación por una combinación lineal de las otras dos. Por ejemplo, la tercera ecuación: x + z = 0 y en este caso: $x = -\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$

Septiembre 1994. Un camión puede transportar como máximo 9 toneladas de mercancía por viaje. En un cierto viaje desea transportar al menos 4 toneladas de la mercancía A, y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporta de A. Sabiendo que se cobra 3000 pesetas por tonelada de A transportada y 2000 pesetas por tonelada de B, se quiere saber cuántas toneladas de A y B se deben cargar en el camión para obtener la ganancia máxima. Para ello se pide:

a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos)*
b) Representar la región factible. *(2,5 puntos)*
c) Resolver el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 9$; $x \geq 4$; $y \geq \dfrac{x}{2}$ Función objetivo: F(x,y) = 3000x + 2000y

b)



c) Solución: 6 toneladas de A y 3 toneladas de B.

Junio 1995. Los alumnos de un conservatorio de música deciden formar una orquesta. Los gustos del público exigen que haya siempre mayor o igual número de instrumentos de cuerda que de viento, y que el número de instrumentos de cuerda no debe superar el doble del número de instrumentos de viento. En total hay disponibles 20 instrumentos de viento y 30 de cuerda. Los empresarios pagan a la orquesta 25.000 pesetas por cada instrumento de viento y 20.000 por cada uno de cuerda. Se pide:

a) ¿De cuántos instrumentos de cuerda y cuántos de viento se debe componer la orquesta para obtener el máximo beneficio? *(6 puntos)*
b) Si se suprime la restricción del número total disponible de instrumentos de viento ¿varía la respuesta en el apartado a)?. Razonar la respuesta. En caso de que varíe, calcular la nueva solución. *(2 puntos)*
c) Si se suprime tanto la restricción del número total disponible de instrumentos de viento como de cuerda ¿qué ocurre con el beneficio?. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 30 instrumentos de cuerda y 20 de viento.
b) 30 instrumentos de cada tipo.
c) La región factible es abierta. Los beneficios podrían ser tan grandes como quisiéramos.

Junio 1995. a) En un problema de programación lineal, qué diferencia hay entre solución factible y solución óptima. *(1 punto)*
b) Sea S la región del plano definida por las cinco inecuaciones siguientes:

$$x - y \geq -2 \qquad x + 2y \leq 6 \qquad 2x + y \leq 6 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Se pide:

b_1) Representar gráficamente la región S y calcular sus vértices. *(4 puntos)*

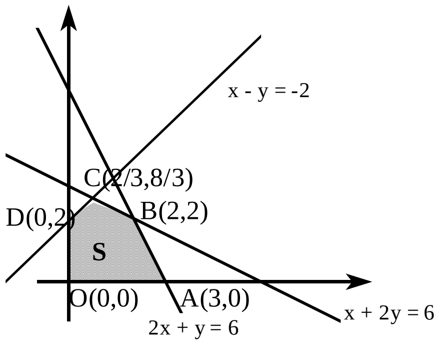
b_2) Considerar la función f(x,y) = x + y. Calcular los valores de (x,y) que hacen mínima y los que hacen máxima la función f(x,y) en la región S. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

b_3) Considerar la función g(x,y) = −2x − 4y. Calcular los valores de (x,y) que hacen mínima y los que hacen máxima la función g(x,y) en la región S. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Solución factible es cualquiera que cumpla las restricciones y, por tanto, pertenezca a la región factible. La solución óptima es la que, entre las factibles, maximice o minimice (según proceda) la función objetivo.

b_1)



b_2) Mínima: x = 0 , y = 0. Máxima: x = 2 , y = 2

b_3) Mínima: cualquier punto del lado BC. Máxima: x = 0 , y = 0

Septiembre 1995. a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Resolver, indicando los pasos seguidos, la ecuación matricial AB + CX = 2D. *(5 puntos)*

NOTA: X es una matriz.

b) Escribir un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea incompatible y comprobar la incompatibilidad. Interpretar geométricamente este sistema. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $X = C^{-1} \cdot (2D - A \cdot B) = \begin{pmatrix} -22 & 0 \\ \frac{31}{2} & 0 \end{pmatrix}$ b) Por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Son dos rectas paralelas.

Septiembre 1995. Una compañía aérea tiene 2 aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede pasar de 120 vuelos y el avión B no puede hacer más de 180. Entre los dos aviones han de realizar al menos 60 vuelos y como mucho 200. Se pide:

a) Si en cada vuelo del avión A la empresa gana 300.000 pesetas y en cada vuelo del avión B 200.000, ¿cuántos vuelos debe realizar cada avión para maximizar los beneficios de la empresa? (Explicar los pasos seguidos para resolver el problema) *(6 puntos)*

b) ¿Se puede quitar alguna restricción sin que la solución varíe?. Razonar la respuesta. *(1 punto)*

c) Si en cada vuelo el avión A consume el doble de litros de gasolina que el avión B, ¿cuántos vuelos ha de hacer cada avión para que el consumo de gasolina sea mínimo?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) 120 vuelos el A y 80 el B.

b) Se puede eliminar la restricción correspondiente a los 180 vuelos como máximo que debe hacer B.

c) 30 vuelos cada tipo de avión.

Junio 1996. Un fabricante de alfombras dispone de las siguientes existencias de lana: 500 kg. de color azul, 400 kg. de color verde y 225 kg. de color rojo. Desea fabricar dos tipos de alfombras, A y B. Para fabricar una de tipo A se necesitan 1 kg. de lana azul y 2 kg. de lana verde y para fabricar una de tipo B, 2 kg. de lana azul, 1 kg. de lana verde y 1kg. de lana roja. Cada alfombra de tipo A se vende por 2.000 pesetas y cada una de tipo B por 3.000 pesetas. Se supone que se vende todo lo que se fabrica. Se pide:

a) ¿Cuántas alfombras de cada tipo se han de fabricar para que el beneficio sea máximo?, ¿cuál es ese beneficio máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. (*8 puntos)*
b) ¿Qué cantidad de lana de cada color quedará cuando se fabrique el número de alfombras que proporciona el máximo beneficio? *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 100 del tipo A y 200 del B. Beneficio: 800.000 ptas. b) Sólo sobran 25 kg. de lana roja.

Junio 1996. Tres personas A, B y C le van a hacer un regalo a un amigo común. El regalo les cuesta 8.600 pesetas. Como no todos disponen del mismo dinero deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada 2 pesetas que paga B, C paga 3 pesetas. Se pide:

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar cuánto paga cada persona. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema planteado en el apartado anterior por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $\begin{cases} A+B+C=8600 \\ A=3(B+C) \\ 3B=2C \end{cases}$ b) A: 6450 ptas. , B: 860 ptas. , C: 1290 ptas.

Septiembre 1996. En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con dos alimentos A y B. Estos alimentos contienen tres principios nutritivos: N_1, N_2 y N_3. Una unidad de A vale 100 pesetas y contiene 2 unidades de N_1, 1 de N_2 y 1 de N_3. Una unidad de B vale 240 pesetas y contiene 1, 3 y 2 unidades de N_1, N_2 y N_3 respectivamente.
Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de N_1, N_2 y N_3 respectivamente. Se pide:

a) Plantear un problema de programación lineal que permita determinar las cantidades de alimento A y B que dan lugar a la dieta de coste mínimo. *(5 puntos)*
b) Resolver el problema planteado en el apartado anterior. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Restricciones: $x\geq 0$; $y\geq 0$; $2x+y\geq 4$; $x+3y\geq 6$; $x+2y\geq 5$ Función objetivo: F(x,y) = 100x + 240y
b) Solución: 3 unidades de A y 1 unidad de B.

Septiembre 1996. Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Comprobar que no se cumple la siguiente igualdad: $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$. ¿Cuál es la razón de que no se cumpla? *(6 puntos)*

b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo. Interpretar geométricamente el sistema. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. La razón es que $A \cdot B \neq B \cdot A$

b) El sistema no tiene solución. Las ecuaciones representan dos rectas paralelas.

Junio 1997. Sea S la región del plano definida por las tres inecuaciones siguientes:

$$x - y - 1 \leq 0 \qquad y \geq 3 - 3x \qquad x + 3y \geq 5$$

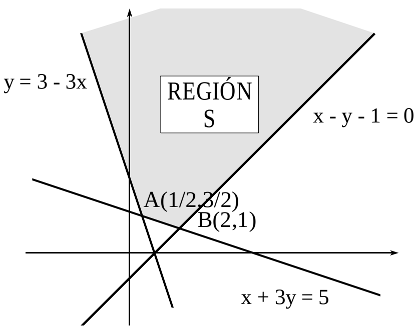
a) Representar gráficamente la región S. *(2 puntos)*
b) Considerar la función f(x,y) = x + 3y. Calcular, si existen, los valores de (x,y) que hacen máxima y los que hacen mínima la función f(x,y) en la región S. Razonar la respuesta. *(4 puntos)*
c) Suponer que en la tercera inecuación se cambia la desigualdad, es decir las inecuaciones que definen S son:

$$x - y - 1 \leq 0 \quad ; \quad y \geq 3 - 3x \quad ; \quad x + 3y \leq 5.$$

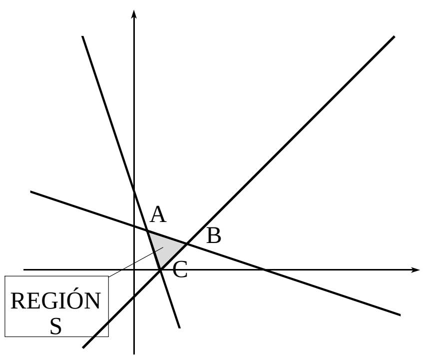
¿Cuáles son ahora las respuestas del apartado b)?. Razonar la respuesta. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)



b) No existen valores que hagan máxima la función f(x,y).
Los valores que hacen mínima la función f(x,y) son las coordenadas de los puntos del segmento AB.



c) Al cambiar la tercera inecuación, cambia la región S:

Ahora, los valores que hacen máxima la función f(x,y) son los puntos del segmento AB.
Los valores que hacen mínima la función f(x,y) son las coordenadas de C: x = 1 , y = 0.

Junio 1997. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix}$ siendo m un parámetro real. Se pide:

a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro m. *(3 puntos)*

b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Discutir si existe solución según los valores del parámetro m. En caso afirmativo, resolver el sistema. *(4 puntos)*

c) Para m = 7, considerar el sistema de ecuaciones lineales $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Discutir si existe solución.

(3 puntos)

SOLUCIÓN.
a) Si m = 7: rg A = 2 ; si m ≠ 7: rg A = 3
b) Si m = 7, el sistema es compatible indeterminado. Soluciones: $x = -5\lambda$, $y = 2\lambda$, $z = \lambda$
Si m ≠ 7, el sistema es compatible determinado. Soluciones: x = y = z = 0
c) El sistema es incompatible.

Septiembre 1997. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 6 \\ x - y + z = 0 \\ x - y \quad\quad = 2 \end{cases}$. Se pide:

a) Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo. *(5 puntos)*
b) Modificando una sola de las tres ecuaciones, transformar el sistema dado en un sistema compatible indeterminado y resolverlo. Razonar la respuesta. *(5 puntos)*
NOTA: Resolver los sistemas por el método de Gauss

SOLUCIÓN.
a) El sistema es compatible determinado. Solución: x = 4/7 , y = −10/7 , z = −2
b) Se trata de que la ecuación que queramos modificar sea una combinación lineal de las otras dos.

Septiembre 1997. En una empresa se produce queso y mantequilla. Para fabricar una unidad de queso se necesitan 10 unidades de leche y 6 unidades de mano de obra y para fabricar una unidad de mantequilla se utilizan 5 de leche y 8 de mano de obra. La empresa dispone cada día de 200 unidades de leche y 150 de mano de obra. Sabiendo que una unidad de queso se vende a 400 pesetas y una de mantequilla a 250 y que se vende todo lo que se produce, se pide:

a) ¿Cuántas unidades de queso y de mantequilla se han de producir diariamente para que el beneficio sea máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(7 puntos)*
b) Suponer que la empresa decide no producir más de 13 unidades de queso, ¿cambia la solución del apartado a)?. Razonar la respuesta y en caso de que varíe, calcular la nueva solución del problema. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 17 unidades de queso y 6 unidades de mantequilla.
b) Nueva solución: 13 unidades de queso y 9 de mantequilla.

Junio 1998. a) Considerar una matriz A de orden m×n con m ≠ n. Razonar si se puede calcular la expresión $A.A^t - A^t.A$ siendo A^t la matriz traspuesta de A. *(4 puntos)*

b) Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, resolver por el método de Gauss:

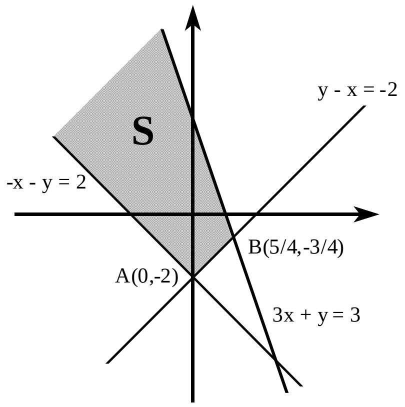
i) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A^t.A$ *(4 puntos)*
ii) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A.A^t$ *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) No se puede calcular. La matriz $A \cdot A^t$ será de orden m×m y la matriz $A^t \cdot A$ de orden n×n y no se podrán restar.
b) i) $x = \lambda$, $y = -3\lambda$, $z = \lambda$
ii) $x = y = 0$

Junio 1998. Considerar las inecuaciones: $y - x \geq -2$; $-x - y \leq 2$; $3x + y \leq 3$. Se pide:

a) Representar gráficamente el conjunto S definido por estas inecuaciones. *(3 puntos)*
b) Determinar si f(x,y) = 3x - 2y alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. *(3,5 puntos)*
c) determinar si f(x,y) = -6x + 4y alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a)



b) Máximo: (5/4 , −3/4). Mínimo: No tiene.
c) Máximo: No tiene. Mínimo: (5/4 , −3/4)

Septiembre 1998. Se considera un número de tres cifras del que se sabe que la suma de sus tres cifras es 12, el doble de la cifra de las decenas es igual a la suma de las otras dos cifras y, por último, se sabe que la cifra de las centenas es tres más la mitad de la cifra de las decenas. Se pide:

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales con el que se determine dicho número. *(3 puntos)*
b) Resolver, utilizando el método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales planteado en el apartado a). *(4 puntos)*
c) ¿Cuál es la solución del problema si no se considera la última condición?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2y=x+z \\ x=3+\dfrac{y}{2} \end{cases}$ b) x = 5 ; y = 4 ; z = 3 (el número es 543) c) $x = 8 - \lambda$; $y = 4$; $z = \lambda$

Septiembre 1998. Una empresa que fabrica motos y coches en dos factorías F_1 y F_2, ha recibido un pedido de 300 coches y 500 motos. En la factoría F_1 se producen 10 coches y 25 motos por hora y en la F_2 se producen 20 coches por hora y el mismo número de motos por hora que en la otra. Sabiendo que los costes operativos de las factorías F_1 y F_2 son 9.000 y 7.000 unidades monetarias por hora respectivamente, se pide:

a) ¿Cuántas horas debe trabajar cada factoría para servir el pedido con los mínimos costes?, ¿cuál es el valor de estos mínimos costes?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*
b) Suponer que la empresa decide que el número de horas trabajadas entre las dos factorías para servir un pedido no puede ser superior a 50. ¿Cambiaría la solución del problema? Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 0 horas la factoría F_1 y 20 horas la F_2. 140.000 ptas. por hora. b) No cambia la solución.

Junio 1999. Una empresa se dedica a la producción de frascos de perfume y de agua de colonia a partir de tres factores productivos F_1, F_2 y F_3. Las unidades de dichos factores utilizadas en la producción de cada tipo de frasco se detallan en la siguiente tabla:

	Perfume	**Agua de colonia**
F_1	1	2
F_2	2	0
F_3	0	4

Sabiendo que el precio de venta de un frasco de perfume es de 5.000 pesetas, de uno de agua de colonia es de 2.000 pesetas y que la empresa dispone de 240 unidades de F_1, 360 de F_2 y 440 de F_3:

a) Calcular el número de frascos de cada tipo que debe fabricar la empresa para maximizar sus beneficios. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*
b) ¿Se consumen todas las existencias de F_1, F_2 y F_3 en la producción de los frascos que maximiza los beneficios?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 180 frascos de perfume y 30 de agua de colonia. b) Sobran 320 unidades de F_3

Junio 1999. Considerar la ecuación matricial: $X\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & m^2+m\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, con m un parámetro real. Se pide:

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe una única matriz X que verifica la ecuación anterior? *(4 puntos)*
b) Si es posible, resolver la ecuación matricial para m = 0. *(3 puntos)*
c) Si es posible, resolver la ecuación matricial para m = 1. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $\forall\, m \neq 1$ y -2 b) $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ c) No tiene solución.

Septiembre 1999. En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla. Se pide:

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema planteado en el apartado anterior. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ y+z=1{,}2x \end{cases}$ b) x (vainilla) = 50 , y (chocolate) = 20 , z (nata) = 40

Septiembre 1999. Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 30 pesetas y el de pienso compuesto 52 pesetas, se pide:

a) ¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(7 puntos)*
b) ¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Medio kilo de maíz y un kilo y tres cuartos de pienso. b) Sí cambiaría: dos kilos de maíz y un kilo de pienso.

Junio 2000. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$, con b un parámetro real. Se pide:

a) ¿Para qué valores del parámetro b el sistema de ecuaciones lineales $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene sólo la solución x = y = z = 0?. Justificar la respuesta. *(5 puntos)*

b) Para b = −1, resolver, si es posible, el sistema de ecuaciones lineales $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Para $b \neq \pm 1$ b) $x=1-\lambda$; $y=-1+\lambda$; $z=\lambda$

Junio 2000. Un colegio prepara una excursión a la montaña para 114 alumnos. Para ello dispone de 8 vehículos de 6 plazas cada uno y otros 8 de 15 plazas, pero para el día de la excursión sólo dispone de 10 conductores. El viaje de ida y vuelta con un vehículo de 6 plazas cuesta 800 pesetas y con uno de 15 plazas 2100 pesetas. Calcular cuántos vehículos de cada tipo debe utilizar el colegio para que el coste del transporte sea mínimo. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.
4 vehículos de seis plazas y 6 de quince plazas.

Septiembre 2000. Una empresa produce dos tipos de bolsos A y B. La producción de un bolso de tipo A requiere 3 unidades de materia prima y 5 horas de trabajo. Por otra parte, la producción de un bolso de tipo B requiere 2 unidades de materia prima y 4 horas de trabajo. La empresa en cuestión dispone cada día de 180 unidades de materia prima y 320 horas de trabajo. Sabiendo que cada bolso de tipo A produce un beneficio de 4 unidades monetarias, cada bolso de tipo B 3 unidades monetarias y que se vende todo lo que se produce, se pide:

a) ¿Cuántos bolsos de cada tipo se han de producir diariamente para que el beneficio sea máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(7 puntos)*
b) Suponer que cambian los beneficios producidos por cada tipo de bolso, siendo el que produce uno de tipo A de 3 unidades monetarias y uno de tipo B de 2, ¿varía la solución del apartado a)?. En caso de que varíe, calcular la nueva solución del problema. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 40 bolsos del tipo A y 30 del tipo B.
b) Las soluciones son múltiples: del tipo A hay que producir un mínimo de 40 bolsos y los del tipo B deben verificar: 3 A + 2 B = 180.

Septiembre 2000. Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Determinar una matriz X que verifique: $A^2 \cdot X = \frac{1}{2} B \cdot C$ *(5 puntos)*

b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $(C\cdot B)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & -2\end{pmatrix}$ b) El sistema es compatible indeterminado. Soluciones: $x=-\frac{5}{4}\lambda$, $y=-\frac{3}{4}\lambda$, $z=\lambda$

Junio 2001. El tratamiento de cierta enfermedad requiere la administración de dos complejos vitamínicos, C_1 y C_2. Cada semana es preciso consumir al menos 450 mg de C_1 y 200 mg de C_2. Estos complejos se presentan en dos comprimidos diferentes: el comprimido de color rojo que cuesta 25 pesetas la unidad y que contiene 15 mg de C_1 y 25 mg de C_2 y el comprimido de color azul que también cuesta 25 pesetas la unidad y que contiene 28 mg de C_1 y 10 mg de C_2. ¿Cuántos comprimidos de cada color debe tomar un individuo en una semana para que el coste del tratamiento sea mínimo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.
2 comprimidos rojos y 15 azules.

Junio 2001. En una librería hubo la semana pasada una promoción de tres libros: una novela, un libro de poesía y un cuento. Se vendieron 200 ejemplares de la novela, 100 de poesía y 150 cuentos. Sabiendo que la librería ingresó por dicha promoción 8.600 euros, que el precio de un ejemplar de novela es el doble que el de un cuento y que el triple de la diferencia entre el precio del ejemplar de poesía y del cuento es igual al precio de una novela, se pide:

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar el precio al que se vendió cada libro. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema de ecuaciones planteado por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} 200x + 100y + 150z = 8600 \\ x - 2z = 0 \\ x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$ b) x (novela) = 24€ , y (poesía) = 20€ , z (cuento) = 12€

Septiembre 2001. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -x - y + 3z = 0 \\ 2x + bz = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$ con *b* un parámetro real, calcular:

a) El rango de la matriz de coeficientes del sistema según los valores del parámetro b. *(4 puntos)*
b) Los valores del parámetro *b* para los que el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado y hallar la solución del sistema para los valores de *b* calculados. *(3 puntos)*
c) Los valores del parámetro *b* para los que el sistema de ecuaciones lineales es compatible indeterminado y hallar las soluciones del sistema para los valores de *b* calculados. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Si $b = -10$: rg A = 2 ; si $b \neq -10$: rg A = 3 b) $b \neq -10$. $x = y = z = 0$
c) $b = -10$. $x = 5\lambda$, $y = -2\lambda$, $z = \lambda$

Septiembre 2001. Un taller de cerámica produce jarrones y ceniceros de los que obtiene unos beneficios unitarios de 5 y 6 unidades monetarias, respectivamente. La producción de dichos artículos se realiza a partir de dos factores productivos F_1 y F_2, de los que se utilizan 4 y 2 unidades, respectivamente, por cada jarrón y 2 y 3 unidades por cada cenicero. Sabiendo que la disponibilidad semanal de F_1 es de 110 unidades y de F_2 es de 85 unidades, el taller quiere saber:

a) ¿Cuántos jarrones y ceniceros debe producir con los recursos de que dispone para maximizar sus beneficios semanales? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*
b) Si a partir de un estudio de mercado se concluye que existe más demanda de jarrones que de ceniceros, ¿afectará esta circunstancia a la producción del taller si su objetivo sigue siendo maximizar sus beneficios? *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 20 jarrones y 15 ceniceros b) La nueva condición no afecta a la solución.

Junio 2002. Se considera la función f(x , y) = x + 3y, se pide:

a) Razonar si f(x , y) alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto:

$$S = \{(x,y) \ / \ 2x + y \leq 4 \ , \ x + 3y \leq 7 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0\}$$

En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. *(6 puntos)*
b) Razonar si f(x , y) alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto:

$$T = \{(x,y) \ / \ 2x + y \geq 4 \ , \ x + 3y \geq 7 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0\}$$

En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Máximo: $\left(0, \frac{7}{3}\right)$ y $(1,2)$; mínimo: (0 , 0) b) Máximo: no hay ; mínimo: (1 , 2) y (7 , 0)

Junio 2002. En una empresa trabajan 160 personas y todas ellas deben hacerse un reconocimiento médico en el plazo de tres días. El primer día se lo hace la tercera parte de los que se lo hacen durante los otros dos días. El segundo día y el tercero se lo hacen el mismo número de personas. Se pide:

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular el número de trabajadores que se hacen el reconocimiento cada día. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales propuesto en el apartado anterior por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} x+y+z=160 \\ 3x-y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ b) $x = 40$, $y = 60$, $z = 60$

Septiembre 2002. Una empresa se dedica a la producción de dos tipos de tejidos A y B utilizando como materias primas algodón, poliéster y seda. Se dispone de 60 unidades de algodón, de 35 de seda y de 80 de poliéster y se sabe que las unidades de cada materia prima necesarias para la producción de 1 rollo de cada tipo de tejido vienen dadas en la siguiente tabla

	algodón	**poliéster**	**seda**
A	1	2	0
B	3	2	1

a) Calcular el beneficio total máximo, sabiendo que el beneficio obtenido de un rollo del tejido A es de 50 euros y del B es de 70. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(7 puntos)*
b) ¿Se obtendría excedente de alguna materia prima?. En caso afirmativo, decir cuántas unidades. *(2 puntos)*
c) ¿Cambiaría la solución del apartado a) si al menos hubiera que producir 15 rollos del tejido A?. Razona la respuesta. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.
a) El beneficio máximo es de 2200 € y se obtiene al producir 30 rollos del tejido A y 10 del B.
b) Sobran 25 unidades de seda.
c) No cambia.

Septiembre 2002. a) Se considera el sistema $\begin{cases} (a-3)x+by+cz=-5 \\ bx-ay+10z=17 \\ ax+z=c+6 \end{cases}$. Calcular, mediante el método de Gauss, los posibles valores que pueden tomar los parámetros a, b y c para que el sistema tenga por solución x = 1, y = −3, z = −1. *(7 puntos)*
b) Con las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ comprobar la propiedad asociativa del producto de matrices. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $a = 8$, $b = 3$, $c = 1$ b) $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 118 & -5 \end{pmatrix}$

Junio 2003. Una empresa edita un libro en dos tipos de formato, “normal” y de “bolsillo”. De un ejemplar del primer formato se obtiene un beneficio de 5 unidades monetarias y de un ejemplar del segundo 3. La producción de un ejemplar normal requiere 8 unidades de materia prima y 4 unidades de tiempo y la de bolsillo 4 unidades de materia prima y 3 de tiempo, disponiendo para ello de 800 unidades de materia prima y 480 unidades de tiempo.

a) ¿Cuántos ejemplares de cada formato se han de editar para que el beneficio total sea máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(8 puntos)*
b) Si el beneficio de producir un ejemplar normal fuera de 4 unidades monetarias, ¿cambiaría la solución del apartado anterior?. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) edición normal = 60 , de bolsillo = 80 b) La solución es cualquier punto de la recta $y = -\frac{4}{3}x + 160$

Junio 2003. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & a \end{pmatrix}$**,** siendo a un parámetro real.

a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro a. *(3,5 puntos)*

b) Discutir si existe solución del sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ según los valores de a. En caso afirmativo, resolverlo.

(3,25 puntos)

c) Para a = 6, discutir si existe solución del sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *(3,25 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Si a = 6: rg A = 2 ; si a ≠ 6: rg A = 3.
b) Si a = 6, el sistema es compatible indeterminado: $x = -3\lambda$, $y = 0$, $z = \lambda$
Si a ≠ 6, el sistema es compatible determinado: x = y = z = 0
c) El sistema es incompatible, no tiene solución.

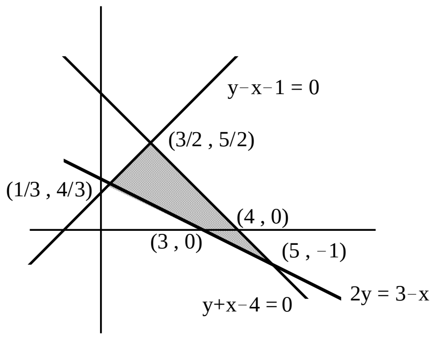
Septiembre 2003. Sea T la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones:

$$y - x - 1 \le 0 \qquad y + x - 4 \le 0 \qquad 2y \ge 3 - x$$

a) Representar gráficamente la región T. *(3 puntos)*
b) Se considera la función f(x,y) = 2y + x. Calcular, si existen, los puntos (x , y) que dan el valor máximo de f(x,y) y los que dan el valor mínimo de f(x,y) en T. *(5 puntos)*
c) ¿Cuál sería la respuesta del apartado anterior si se agrega la desigualdad $y \ge 0$?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)



b) máximo: $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; mínimo: cualquier punto del segmento de extremos $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y (5 , −1)

c) máximo: $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$; mínimo: cualquier punto del segmento de extremos $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ y $(3 , 0)$

Septiembre 2003. Una empresa de juguetes fabrica bicicletas, triciclos y coches. Se sabe que va a necesitar 945 ruedas, que desea fabricar 280 juguetes en total y que se fabricarán 10 bicicletas menos que triciclos.

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de juguetes de cada tipo que va a fabricar. *(3 puntos)*

b) Resolver el sistema anterior por el método de Gauss. *(5 puntos)*

c) ¿Cuál es la relación entre el número de bicicletas y el de coches que se van a fabricar si no se considera la última condición? *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \\ -x+y=10 \end{cases}$ b) x (bicis) = 55 , y (triciclos) = 65 , z (coches) = 160 c) z − x = 105

Junio 2004. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

a) Calcular AB y BA. ***(4 puntos)***

b) Discutir si existe solución del sistema $AB\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo, resolverlo utilizando el método de Gauss. *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$

b) El sistema es compatible indeterminado. Soluciones: x = −14λ − 7 , y = 4λ + 2 , z = λ

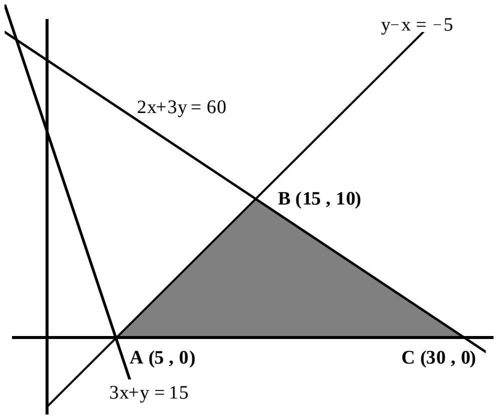
Junio 2004. Se considera la función f(x , y) = x – y

a) Representar el conjunto $A=\{(x , y) \ / \ 3x+y\ge 15 \ , \ y-x\le -5 \ , \ 2x+3y\le 60 \ , \ y\ge 0\}$ y calcular el valor máximo de f(x , y) en A. ¿Alguna de las desigualdades que definen el conjunto A se podría eliminar de forma que siguiera siendo el mismo conjunto? *(7 puntos)*

b) Decir si la función f(x , y) alcanza valor máximo en el conjunto $B=\{(x , y) \ / \ 3x+y\le 15 \ , \ x-y\ge 5 \ , \ x\ge 0\}$. En caso afirmativo, calcular dicho valor. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)



Máximo: $(30\,,0)$. Sí, se puede eliminar $3x+y\le 15$

b) No alcanza un valor máximo. La región factible es abierta.

Septiembre 2004. Un industrial comercializa botijos decorados y botijos sin decorar. El tiempo necesario para fabricar un botijo es de una hora y para decorarlo se necesita otra hora. El beneficio por botijo es de 10 euros si está decorado y de 6 euros si no lo está y se trabaja un máximo de 500 horas mensuales.

a) Plantear y resolver un problema de programación lineal que permita calcular cuántos botijos de cada tipo se han de fabricar al mes para que el beneficio total sea máximo. ***(5 puntos)***

b) ¿Cambiaría la solución del apartado anterior si no se desean fabricar más de 300 botijos sin decorar?. En caso afirmativo, calcularla. *(3 puntos)*

c) Calcular la solución del apartado a) y decir en qué puntos se alcanza, si el beneficio por botijo no decorado es de 5 euros. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Función objetivo: $f(x,y)=10x+6y$. Restricciones: $x\ge 0$; $y\ge 0$; $2x+y\le 500$

Deben fabricarse 500 botijos sin decorar.

b) Sí cambia: 100 botijos decorados y 300 sin decorar.

c) Cualquier punto de coordenadas enteras del segmento de extremos $(250,0)$ y $(0,500)$

Septiembre 2004. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-3&-1&0\\1&0&4\\2&1&3\end{pmatrix}$.

a) Utilizando la matriz inversa de *A*, determinar una matriz *X* tal que $AX=B+C$ *(6,5 puntos)*

b) Discutir si existe solución del sistema $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. En caso afirmativo, resolverlo utilizando el método de Gauss. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\ -1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-6&1&0\\-3&0&3\\7&1&0\end{pmatrix}$ b) Tiene una única solución (compatible determinado):

$x=0$, $y=1$, $z=0$

Junio 2005. En un taller de joyería se fabrican collares con 50, 75 y 85 perlas y para ello se utilizan en su totalidad 17500 perlas y 240 cierres.

a) ¿Cuántos collares de cada tamaño se han de fabricar si se desean tantos collares de tamaño mediano como la media aritmética del número de collares grandes y pequeños? *(6 puntos)*
b) Sin tener en cuenta la condición del apartado anterior, ¿es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño? *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 60 collares de 50 perlas, 80 de 75 y 100 de 85 perlas. b) No.

Junio 2005. Sea T la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones:

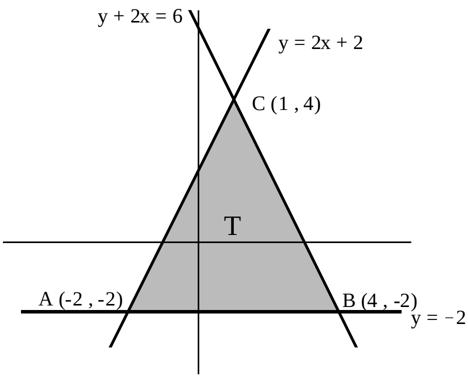
$$-2 \le y \quad ; \quad y \le 2x+2 \quad ; \quad y+2x \le 6$$

a) Representa gráficamente la región T *(2 puntos)*

b) Se considera la función $f(x,y)=\dfrac{2x-y}{2}$. Calcule, si existen, los puntos (x,y) que dan el valor máximo de $f(x,y)$ y los que dan el valor mínimo de $f(x,y)$ en T. *(3,5 puntos)*

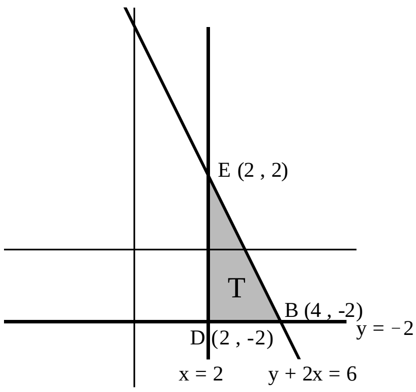
c) Calcule las respuestas del apartado anterior si en T se cambia la desigualdad $y \le 2x+2$ por $x \ge 2$. *(4,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a)



b) El máximo se alcanza en el punto $B\,(4\,,\,-2)$ y el mínimo en cualquier punto del segmento AC.

c) Ahora la región T es:



El máximo se alcanza en el punto $B\,(4\,,\,-2)$ y el mínimo en el $E\,(2\,,\,2)$

Septiembre 2005. Un agricultor dispone de 9 hectáreas para sembrar dos productos A y B. Para el producto A desea destinar como mucho 8 hectáreas. Por cada hectárea sembrada con A y B se obtiene respectivamente un beneficio de 150 y 100 euros.

a) Si se quiere que la superficie correspondiente a B no sea mayor que la mitad que ocupará A, plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita averiguar el número de hectáreas que se han de dedicar a cada producto para maximizar el beneficio total. *(6 puntos)*
b) ¿Cuál es la solución si el beneficio por hectárea es de 125 euros independientemente de que esté sembrada con A o con B y no se tiene en cuenta la restricción del apartado a)? *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 8 hectáreas al producto A y 1 hectárea al B.
b) Las coordenadas de cualquier punto del segmento de extremos $(0,9)$ y $(8,1)$.

Septiembre 2005. a) Mediante cálculo matricial, discuta y resuelva el sistema: $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y - 3z = 5 \end{cases}$

(5 puntos)

b) Calcule la matriz X solución de la ecuación $2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) El sistema es compatible indeterminado. Soluciones: $x = -\frac{\lambda + 4}{4}$, $y = \frac{\lambda + 2}{2}$, $z = \lambda$

b) $X = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}$

Junio 2006. Un fabricante comercializa 2 modelos de pantalón vaquero, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 12 euros por unidad y otro para hombre con beneficio unitario de 20 euros. El próximo mes desea fabricar entre 50 y 750 pantalones para mujer y siempre un número no inferior al que fabrica para hombre. Además no tiene posibilidades de fabricar mensualmente más de 1000 unidades en total.
a) Plantee un programa lineal que permita calcular el número de unidades de cada modelo que ha de fabricar para maximizar el beneficio total. *(2 puntos)*
b) Resolviendo el programa anterior diga el máximo beneficio y cuántas unidades de cada modelo se han de comercializar. *(5,5 puntos)*
c) Diga la solución del apartado anterior si el beneficio unitario es de 15 euros para cada uno de los dos modelos. *(2,5 puntos)*

NOTA: No es necesario considerar que las cantidades fabricadas sean números enteros.

SOLUCIÓN.
a) Función objetivo: $F(x,y) = 12x + 20y$. Restricciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $50 \leq x \leq 750$; $x \geq y$; $x + y \leq 1000$
b) El máximo beneficio es de 16000 € comercializando 500 unidades de cada modelo.
c) Las coordenadas de cualquiera de los puntos del segmento de extremos $(500,500)$ y $(750,250)$.

Junio 2006. Discuta y resuelva el siguiente sistema para todos los valores del parámetro a. (Utilice el método de Gauss para su resolución).

$$\begin{cases} 4x + ay - 2z = -1 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + (2a + 2)z = 6 - a \end{cases}$$

(10 puntos)

SOLUCIÓN.

Discusión: • Si $a=-\frac{2}{3}$: sistema incompatible

• Si $a\neq-\frac{2}{3}, 4$: compatible determinado

• Si $a=4$: compatible indeterminado

Resolución: • Para $a\neq-\frac{2}{3}, 4$: $x=\frac{-a^2+3}{3a+2}$, $y=\frac{4a-5}{3a+2}$, $z=\frac{-a+7}{3a+2}$

• Para $a=4$: $x=-\frac{1}{7}-\lambda$, $y=\lambda$, $z=\frac{3}{14}$

Septiembre 2006. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & 20\\ 16 & 5\end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y $\left(A^2\right)^{-1}$. *(5 puntos)*

b) Despeje X de la ecuación matricial $A^2\cdot X=B$. *(2 puntos)*

c) Calcule X. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $A^2=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{25} & -\frac{1}{25}\\ -\frac{3}{25} & \frac{7}{25}\end{pmatrix}$ b) $X=\left(A^2\right)^{-1}\cdot B$ c) $X=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

Septiembre 2006. Sean $T=\{(x,y)/y+3x\geq 6, y+1\leq 0, 8x-3y\leq 67\}$ y $f(x,y)=3y-8x$

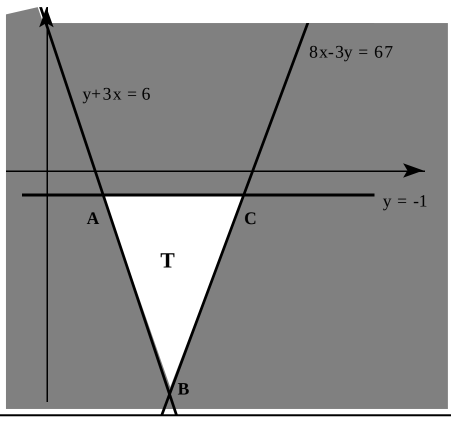
a) Represente gráficamente la región T. *(3,5 puntos)*

b) Calcule el valor máximo y el mínimo, si existen, de la función $f(x,y)$ en T y diga en qué puntos se alcanzan. *(4 puntos)*

c) Represente gráficamente la región $S=\{(x,y)/y+3x\geq 6, y+1\leq 0\}$ y calcule el valor máximo y el mínimo, si existen, de la función $f(x,y)$ en S y diga en qué puntos se alcanzan. *(2,5 puntos)*

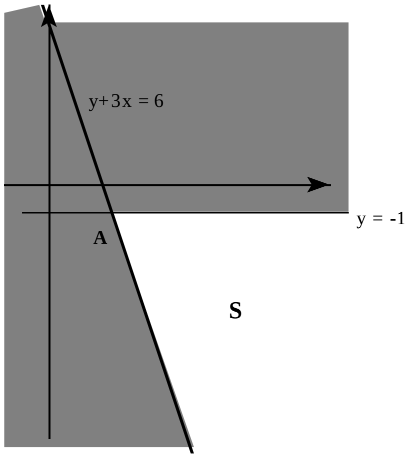
SOLUCIÓN.

a)



b) El valor máximo es $-\frac{65}{3}$ y se alcanza en el punto $A\left(\frac{7}{3},-1\right)$ y el valor mínimo es -67 y se alcanza en cualquier punto del segmento de extremos $B(5,-9)$ y $C(8,-1)$

c)



El valor máximo es $-\dfrac{65}{3}$ y se alcanza en el punto $A\left(\dfrac{7}{3},-1\right)$.
El valor mínimo no se alcanza nunca.

Junio 2007. a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con a un parámetro real no nulo, compruebe que $A^{-1}\cdot B = A$. *(1,5 puntos)*

b) Calcule el rango de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real m. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Comprobar. b) Si $m \neq -15$: el rango de la matriz es 3. Si $m = -15$: el rango es 2.

Junio 2007. Una empresa fabrica dos calidades de un bien, teniendo que producir en total un mínimo de 100 unidades y un máximo de 200. El coste de producción de una unidad de la primera calidad es de 15 euros y se obtiene un beneficio unitario de 100 euros. El coste de producción de una unidad de la segunda calidad es de 10 euros y se obtiene un beneficio unitario de 50 euros.

a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el coste total mínimo para obtenerse un beneficio total de al menos 12500 euros. *(2 puntos)*
b) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el beneficio total máximo con un coste total no superior a 2550 euros. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) El coste total mínimo es de 1875 € que se obtiene produciendo 125 bienes de primera calidad y ninguno de segunda calidad.
b) El beneficio total máximo es de 17000 € que se obtiene produciendo 170 bienes de primera calidad.

Septiembre 2007. A primera hora de la mañana en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10, 20 y 50 euros) con un valor total de 16000 euros. Sabiendo que por cada 3 billetes de 50 euros son necesarios 4 de 20, plantee un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber y resuélvalo por el método de Gauss. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
450 billetes de 10 €, 200 de 20 € y 150 de 50 €

Septiembre 2007. Un camionero transporta dos tipos de mercancías, X e Y, ganando 60 y 50 euros por tonelada respectivamente. Al menos debe transportar 8 toneladas de X y como mucho el doble de cantidad que de Y. ¿A cuánto asciende su ganancia total máxima si dispone de un camión que puede transportar hasta 30 toneladas? *(3,5 puntos)*

> **SOLUCIÓN.**
> 1700 € (debe transportar 20 toneladas de X y 10 toneladas de Y).

Junio 2008.

<u>CUESTIÓN A1</u>: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calcule $A\cdot B$ *(0,75 puntos)*

b) Calcule la matriz inversa de B y utilícela para resolver la ecuación $X\cdot B=B+A$ *(2,75 puntos)*

> **SOLUCIÓN.**
> a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ 7 & -2 & -2\\ -3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3}\\ \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{6}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

<u>CUESTIÓN A2</u>: Un agricultor desea plantar 750 cerezos, 700 perales y 650 manzanos. En el vivero Agro ofrecen un lote de 15 cerezos, 30 perales y 10 manzanos por 700 euros y en el vivero Ceres el lote de 15 cerezos, 10 perales y 20 manzanos cuesta 650 euros.

a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el número de lotes que ha de comprar en cada vivero para que pueda plantar los árboles que desea y para que el coste total de adquisición sea mínimo. *(3 puntos)*

b) ¿Utiliza el agricultor todos los árboles que ha adquirido?, en caso negativo diga cuántos no ha plantado y de qué tipo son. *(0,5 puntos)*

> **SOLUCIÓN.**
> a) Debe comprar 10 lotes en Agro y 40 en Ceres. b) No, deja de sembrar 250 manzanos.

Septiembre 2008.

<u>CUESTIÓN A1</u>: Sea $T=\left\{ (x,y)\ /\ \frac{x}{5}+\frac{y}{8}\geq 5\ ,\ \frac{x}{10}+\frac{y}{6}\leq 5\ ,\ 2x+5y\leq 110\ ,\ y\geq 0 \right\}$

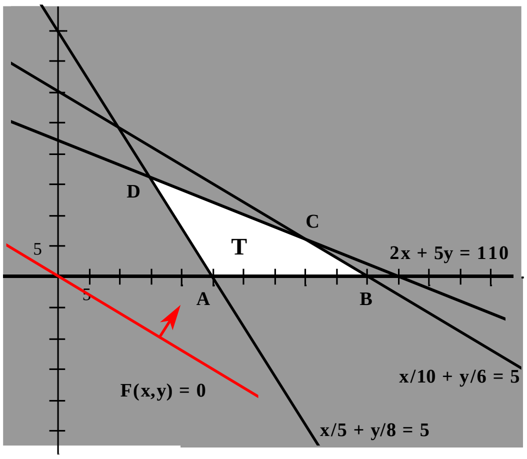
a) Represente gráficamente la región T. *(1 punto)*

b) Se considera la función $f(x,y)=3x+5y$. Calcular, si existen, los puntos (x,y) que dan el valor máximo de $f(x,y)$ y los que dan el valor mínimo de $f(x,y)$ en T. *(1,75 puntos)*

c) ¿Cuál sería la respuesta del apartado anterior si se elimina la desigualdad $y\geq 0$? *(0,75 puntos)*

SOLUCIÓN.

a)



b) Máximo: segmento BC. Mínimo: $(25\,,0)$

c) Máximo: cualquier punto de la semirrecta de origen C de ecuación $\frac{x}{10}+\frac{y}{6}=5$.

Mínimo: No existe.

<u>CUESTIÓN A2</u>: Raquel, Paula y Sara salen de compras y cada una adquiere una camiseta. El precio medio de las prendas es de 14 euros. La diferencia entre el precio de la camiseta de Sara y la de Paula es el doble de la diferencia entre el precio de la camiseta de Paula y la de Raquel. Si a Raquel le hubiera costado su camiseta el doble, sobrepasaría en un euro el precio de la de Sara.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular el precio de cada una de las camisetas y resuélvalo por el método de Gauss. *(2,5 puntos)*
b) ¿Es posible saber el precio de las camisetas si la última condición se cambia por "Si a Paula le hubiera costado su camiseta el cuádruple, sobrepasaría en 42 euros el precio de la de Raquel"?. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

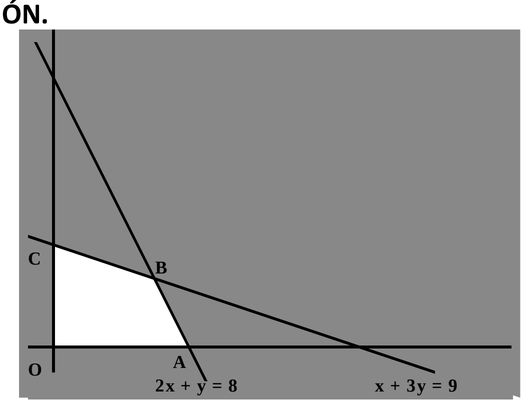
a) $\begin{cases} x+y+z=42 \\ 2x-3y+z=0 \\ 2x \qquad -z=1 \end{cases} \Rightarrow \quad x=10\,,\, y=13\,,\, z=19$ b) No, el sistema es indeterminado.

Junio 2009. **<u>CUESTIÓN A1</u>:** Sea $T=\left\{\,(x\,,y)\;\middle|\; x+3y\le 9\,,\; 2x+y\le 8\,,\; x\ge 0\,,\; y\ge 0\,\right\}$

a) Represente gráficamente el conjunto T. *[1 punto]*
b) Consideramos la función $f(x\,,y)=3x+3y$. Calcular, si existen, los puntos del conjunto T que dan el valor máximo y el valor mínimo de la función. *[1,75 puntos]*
c) ¿Cuál sería la respuesta al apartado anterior si eliminamos en el conjunto T la restricción $y\ge 0$? *[0,75 puntos]*

SOLUCIÓN.

a)



b) Máxima en $(3\,,2)$ y mínima en $(0\,,0)$.

c) Máximo en $(3\,,2)$ y no se alcanza un mínimo.

<u>CUESTIÓN A2</u>: Una tienda posee tres tipos de conservas A, B, C. El precio medio de las tres conservas es de 1 €. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, pagando por ello 60 €. Otro compra 20 unidades de A y 25 de C y paga por ello 45 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular el precio de cada una de las conservas y resuélvalo por el método de Gauss. *[2,5 puntos]*
b) ¿Es posible determinar el precio de cada una de las conservas si cambiamos la tercera condición por *"otro cliente compra 20 unidades de A y 10 de B, pagando por ello 30 €"*? *[1 punto]*

SOLUCIÓN.
a) Cada una de las conservas cuesta 1 €. b) No se puede determinar.

Septiembre 2009.

<u>Cuestión A1</u>: a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&2\\4&1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&4&1\\3&1&1\end{pmatrix}$.

Calcular la matriz $\left(A^2\right)^{-1}$. Resolver la ecuación $AX+B=C$. *(2 puntos)*

b) Resolver por el método de Gauss el siguiente sistema lineal: $\begin{cases}x-9y+5z=33\\x+3y-z=-9\\x-y+z=5\end{cases}$ *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&1\\-2&1&3\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&0\\0&1&-3\end{pmatrix}$ b) $x=\frac{3-\lambda}{2}$; $y=\frac{-7+\lambda}{2}$; $z=\lambda$

<u>Cuestión A2</u>: El señor Álvarez deja su fortuna a sus tres hijos en herencia con las siguientes condiciones:
1. El mayor recibe la media aritmética de los que reciben los otros dos más 30.000 €.
2. El mediano recibe 10.000 € más que la diferencia entre lo que recibe el mayor y lo que recibe el pequeño.
3. El pequeño recibirá la media aritmética de lo que reciben los otros dos menos 30.000 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular qué cantidad recibe cada uno de los hijos del señor Álvarez. Resuélvalo por el método de Gauss. *(2 puntos)*
b) ¿Es posible saber qué cantidad recibe cada uno de los hijos del señor Álvarez si sustituimos la condición 2 por: "al mediano le deja la media aritmética de lo que reciben los otros dos"? *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) Mayor: 70 000 €, mediano: 50 000 €, pequeño: 30 000 € b) No es posible.

Junio 2010. Un número de tres cifras es tal que la suma de las centenas y las unidades con el doble de las decenas es 23, la diferencia entre el doble de las centenas y la suma de las decenas más las unidades es 9 y la media de las centenas y las decenas más el doble de las unidades es 15.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales para calcular dicho número y resuélvalo por el método de Gauss. *(2,5 puntos)*
b) ¿Es posible encontrar un número de tres cifras si cambiamos la tercera condición por "el triple de las centenas más las decenas es 25"? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.
a) 954 b) No es posible encontrarlo

Junio 2010. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 € y el de uno pequeño 60 €.

a) ¿Cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible? *(2 puntos)*
b) Si la empresa dispusiera de 5 conductores más, ¿cuál sería el número de autocares de cada tipo que habría que contratar para que la excursión fuera lo más barata posible? *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
a) 5 pequeños y 4 grandes b) Dos soluciones: 8 grandes / 8 pequeños y 2 grandes

Septiembre 2010.

1. Encuentre una matriz X tal que $XA = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. *(1 punto)*

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule B^{-1}. *(1 punto)*
b) Utilizando B^{-1}, calcule X tal que $XB = A + B$. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.
1. a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. a) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ b) $X = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 3/2 & -1/2 & 7/2 \end{pmatrix}$

Septiembre 2010.

1. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 gr de oro y 1,5 gr de plata, obteniendo un beneficio en la venta de cada una de 40 euros. Para la fabricación de las de tipo B emplea 1,5 gr de oro y 1 gr de plata y obtiene un beneficio en la venta de cada una de 50 euros. El orfebre tiene sólo en el taller 750 gramos de cada uno de los metales. ¿Cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo? *(2,5 puntos)*

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, encuentre una matriz X que resuelva la ecuación $AX + B = C$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.
1. 300 de cada tipo.
2. $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

Junio 2011.

Una perfumería desea liquidar 100 frascos de perfume y 150 barras de labios que han quedado descatalogados en sus firmas, para ello lanza dos ofertas A y B. La oferta A consiste en un lote de un frasco de perfume y una barra de labios que se vende a 30 €. La oferta B consiste en un frasco de perfume y dos barras de labios que se vende a 40 €. No desea ofrecer menos de 10 lotes de la oferta A ni menos de 20 de la oferta B.

a) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia? *(2,5 puntos)*

b) ¿Cambiaría la respuesta al apartado a) si eliminamos el hecho de que desee ofrecer al menos 20 lotes de la oferta B? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.
a) 50 lotes de cada oferta b) No cambia la solución

Junio 2011.

1. Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz inversa de la matriz $B-I_3$ con $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. *(0,75 puntos)*

b) Calcule una matriz X tal que $BX-4A=X$. *(1,25 puntos)*

2. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&-3\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

a) Calcule el rango de la matriz A. *(0,5 puntos)*

b) Aplicar el apartado a) para resolver el sistema lineal $AX=0$. *(1 punto)*

SOLUCIÓN.
1. a) $\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&0&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}0&12&4\\0&4&0\\4&-4&4\end{pmatrix}$ **2. a)** $\mathrm{rg}\,A=3$ **b)** $x=y=z=0$

Septiembre 2011.

1. Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$.

a) Calcule una matriz X tal que $A^2X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. *(1,25 puntos)*

b) Calcule una matriz X tal que $A+XB=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$. *(1,25 puntos)*

2. Razonar la existencia de solución del sistema lineal: *(1 punto)*

$$\begin{aligned}x+3y+z&=6\\x-2y-z&=5\\2x+11y+4z&=10\end{aligned}$$

SOLUCIÓN.

1. a) $X=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -2a-1 & a \\ -2b-1 & b \end{pmatrix}$ **2.** El sistema es incompatible

Septiembre 2011.

Una fábrica textil quiere fabricar pantalones y faldas. La fábrica posee dos secciones: sección de corte y sección de confección. Cada pantalón requiere 6 minutos en la sección de corte y 4 en la de confección, mientras que cada falda requiere 4 minutos en la sección de corte y 6 en la de confección. La sección de corte no puede funcionar más de 6 horas al día y la de confección no más de 8 horas al día. Si cada pantalón deja a la empresa un beneficio de 10 € y cada falda de 6 €:

a) ¿Cuántos pantalones y cuántas faldas se han de fabricar si se quiere maximizar el beneficio? *(2,5 puntos)*

b) Si se pudiera disponer de 1 hora más de funcionamiento en la sección de corte, ¿cuál sería la respuesta al apartado anterior? *(1 punto)*

SOLUCIÓN.

a) 60 pantalones **b)** 70 pantalones

Junio 2012.

Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) *(0,75 puntos)* Calcular la matriz A^{-1}.

b) *(1 punto)* ¿Cuántas filas y cuántas columnas ha de tener una matriz D para que la ecuación $AD=B$ tenga solución? Resolver la ecuación $AD=B$.

c) *(0,25 puntos)* Estudiar el rango de la matriz C.

d) *(1,5 puntos)* Utilizando los apartados a) y c) resolver el sistema lineal $(AC)\,X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ **b)** 3 filas y 2 columnas. $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\text{rg}\, C = 2$ **d)** $x=0$, $y=-\lambda$, $z=\lambda$

Junio 2012.

Se va a organizar una planta en una empresa de electrodomésticos donde van a trabajar mecánicos y electricistas. Por necesidad del mercado es necesario que haya mayor o igual número de electricistas que de mecánicos y que el número de electricistas no supere al doble del de mecánicos. Se necesitan al menos 20 electricistas y no hay más de 30 mecánicos disponibles.

a) *(1 punto)* Plantear un problema lineal que nos permita averiguar cuántos trabajadores de cada clase se deben de contratar para maximizar el beneficio que obtiene la empresa por mes, sabiendo que por cada mecánico se obtienen 2000 € de beneficio mensual y por cada electricista 2500 €.

b) *(1,5 puntos)* Calcular cuántos mecánicos y cuántos electricistas se deben de contratar para obtener un beneficio máximo, si el beneficio mensual que se obtiene por cada trabajador es el expuesto en el apartado a).

c) *(1 punto)* Si cada mecánico y cada electricista cuestan a la empresa 300 € mensuales y podemos disponer de todos los mecánicos que se necesiten, ¿cuántos trabajadores de cada clase habrá de contratar la empresa para que el coste sea mínimo?

SOLUCIÓN.

a) Función objetivo: $F(x,y)=2000x+2500y$ Restricciones: $x\geq 0\ ,\ y\geq x\ ,\ y\leq 2x\ ,\ y\geq 20\ ,\ x\leq 30$

b) 30 mecánicos y 60 electricistas

c) 10 mecánicos y 20 electricistas

Septiembre 2012.

La suma de la inversión en acciones de una empresa textil, una empresa de gas y una compañía de telefonía es de 7400 €. Las acciones de la empresa textil pagan un 2% de interés anual, las de la empresa de gas un 4% y las de la compañía de telefonía pagan un 5%. La suma del interés anual es de 278 €. La inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 1000 € menos que la suma de la inversión en acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas.

a) *(0,75 puntos)* Plantear un sistema lineal que permita calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

b) *(0,75 puntos)* Calcular la cantidad invertida en cada una de las acciones.

c) *(1 punto)* ¿Podemos calcular el capital invertido en cada una de las acciones si cambiamos la tercera condición por *"el doble de la inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 2000 € menos que la diferencia de la inversión en las acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas"*?

d) *(1 punto)* Llamando A a la matriz de coeficientes obtenida en el apartado c), resolver el sistema lineal

$$AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN.

a) $\begin{cases} x+y+z=7400 \\ 2x+4y+5z=27800 \\ x+y-z=1000 \end{cases}$

b) 2500 € en la empresa textil, 1700 € en la de gas y 3200 € en la de telefonía.

c) No. El sistema es incompatible.

d) $x=\dfrac{\lambda}{2}\ ,\ y=-\dfrac{3\lambda}{2}\ ,\ z=\lambda$

Septiembre 2012.

Considerar $T=\left\{(x,y)\,/\ y\geq\frac{1}{3}x\ ,\ y\leq 4x\ ,\ 2x+y\leq 4\ ,\ x+2y\leq 4\right\}$.

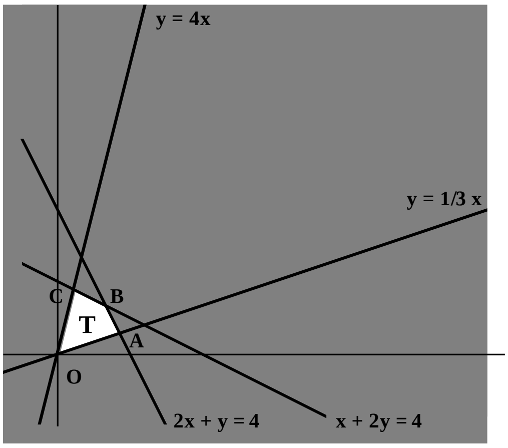
a) *(1 punto)* Representar gráficamente el conjunto anterior.

b) *(1,5 puntos)* Calcular los extremos de la función $2x+y$ sobre el conjunto T.

c) *(1 punto)* Calcular los extremos de $2x+y$ si añadimos al conjunto T la restricción $x+y\geq 1$.

SOLUCIÓN.

a)



b) Valor mínimo: en $O(0,0)$.
Valor máximo: en cualquier punto del segmento de extremos $A\left(\frac{12}{7},\frac{4}{7}\right)$ y $B\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$

c) Mínimo en $D\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$ y máximo en cualquier punto del segmento AB.

Junio 2013.

(3,5 puntos) Discutir, según los valores de a, el sistema:

$$\begin{array}{c} x+ay+z=-1 \\ -x+y+az=0 \\ 2x-y+z=a \end{array}$$

Resolverlo para $a=-2$.

SOLUCIÓN.

· Si $a\neq 0$ y $a\neq -1$: Sistema compatible determinado
Si $a=0$: Sistema incompatible
Si $a=-1$: Sistema incompatible

· Para $a=-2$: $x=-\frac{5}{4}$, $y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{3}{4}$

Junio 2013.

(3,5 puntos) Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kilo de pintura mate necesita 0,4 kilos de producto A y 0,6 kilos de producto B. Cada kilo de pintura brillante necesita 0,2 kilos de producto A y 0,8 kilos de producto B. La empresa no puede usar más de 200 kilos de producto A ni más de 500 kilos de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200 kilos de pintura mate y al menos 300 kilos de pintura brillante.

El beneficio por kilo de pintura mate es de 4 euros y el beneficio por kilo de pintura brillante es de 5 euros. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

SOLUCIÓN.

300 kilos de pintura mate y 400 kilos de pintura brillante. Beneficio máximo: 3200 euros.

Septiembre 2013.

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) *(1,5 puntos)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $3X+2A=BC$.

b) *(2 puntos)* Encontrar, si existe, la matriz inversa de A.

SOLUCIÓN.

a) $X=\begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 1\\ 5/3 & -4/3 & -7/3\\ 5/3 & -7/3 & 2/3\end{pmatrix}$ **b)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}9/2 & 3/2 & -1\\ 3/2 & 1/2 & 0\\ 7/2 & 3/2 & -1\end{pmatrix}$

Septiembre 2013.

(3,5 puntos) Una empresa va a invertir en dos productos financieros A y B, para lo cual dispone de un total de 12 millones de euros, aunque no es necesario que invierta todo el dinero. Por razones legales debe invertir al menos 2 millones de euros en cada uno de los dos productos A y B y, además, tiene que invertir en A al menos el doble de lo que invierte en B.

El beneficio que le reporta cada euros invertido en el producto A es de 0,2 euros y el beneficio que le reporta cada euro invertido en el producto B es de 0,4 euros, mientras que por cada euro que no invierta en ninguno de los dos productos tendrá un beneficio de 0,3 euros. ¿Qué cantidad de dinero debe invertir la empresa en cada producto para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá?

SOLUCIÓN.
4 millones en A y 2 millones en B. Máximo beneficio: 3,4 millones de euros

Junio 2014.

(3,5 puntos)

a) *(2,5 puntos)* Los tres profesores de matemáticas de un instituto, María, Ana y Carlos, tienen edades cuya suma es 120 años. La suma de las edades de María y Ana es el doble que la edad de Carlos. Además, dentro de 4 años, la suma de las edades que tengan Ana y Carlos será el triple de la edad que tenga María. Plantear y resolver un sistema lineal que permita conocer las edades de los tres profesores.

b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, la matriz inversa de: $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.

a) María: 29 años, Ana: 51 años y Carlos: 40 años. **b)** $A^{-1}=\begin{pmatrix}2/3 & -1/3\\ 1/3 & -2/3\end{pmatrix}$

Junio 2014.

(3,5 puntos) Un deportista solamente puede tomar para desayunar barritas de chocolate y barritas de cereales. Cada barrita de chocolate proporciona 40 gramos de hidratos de carbono, 30 gramos de proteínas y 200 Kcal, mientras que cada barrita de cereales proporciona 80 gramos de hidratos de carbono, 10 gramos de proteínas y 100 Kcal. El deportista quiere tomar al menos 320 gramos de hidratos de carbono y 90 gramos de proteínas, pero no quiere tomar más de 1000 Kcal. El coste de cada barrita de chocolate es de 2 euros, mientras que el de cada barrita de cereales es de 1 euro. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas barritas de cada tipo tiene que tomar el deportista para desayunar de forma que cumpla las condiciones anteriores y gaste la menor cantidad de dinero.

SOLUCIÓN.
Dos barritas de chocolate y tres de cereales.

Septiembre 2014.
(3,5 puntos)

a) *(2,5 puntos)* Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

Encontrar, si existe, una matriz X tal que verifique: $AB+2CX=D$.

b) *(1 punto)* Encontrar el rango de la matriz: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.
a) $X=\begin{pmatrix}-3/2 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$ **b)** 2

Septiembre 2014.
(3,5 puntos) Una empresa tiene dos fábricas A y B en las que produce acero. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica A se producen 5 Tm de acero y 3 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 2 Tm de dióxido de carbono. Por cada hora de funcionamiento de la fábrica B se producen 6 Tm de acero y 1 Tm de desperdicios y se emiten a la atmósfera 4 Tm de dióxido de carbono. Por normativa medioambiental, la empresa no puede producir (entre las dos fábricas) más de 48 Tm de desperdicios al día ni puede emitir a la atmósfera (entre las dos fábricas) más de 72 Tm de dióxido de carbono al día. Por otra parte, cada una de las fábricas debe funcionar al menos 6 horas al día, y ninguna de las dos puede funcionar más de 18 horas al día. Plantear y resolver un problema de programación lineal que permita determinar cuántas horas al día debe funcionar cada fábrica para maximizar la cantidad de acero producida por la empresa, teniendo en cuenta las restricciones anteriores.

SOLUCIÓN.
Cada una de las fábricas debe trabajar 12 horas al día.

Junio 2015.
(3,5 puntos) Una empresa agroalimentaria produce dos tipos de bebida: A y B. Cada litro de bebida A lleva 0,2 litros de zumo de naranja y 0,4 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes. Cada litro de bebida B lleva 0,6 litros de zumo de naranja y 0,2 litros de zumo de mandarina, además de otros componentes. La empresa puede utilizar como máximo 1200 litros de zumo de naranja y 1500 litros de zumo de mandarina. Se quiere que la cantidad producida de tipo A sea mayor o igual que la de tipo B. Sabiendo que el beneficio por litro de bebida de tipo A es de 0,8 euros y por litro de bebida B es de 1 euro, determinar la cantidad de bebida de cada tipo que tiene que producir para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál será el máximo beneficio?

SOLUCIÓN.
3300 litros de bebida A y 900 litros de B. Máximo beneficio: 3540 €.

Junio 2015.
(3,5 puntos)
a) *(2,25 puntos)* Un padre decidió repartir su fortuna de 360 monedas de oro entre sus tres hijas, Isabel, Catalina y Juana, de forma que se cumplieran las siguientes condiciones. La cantidad que recibiera Isabel debía ser igual al doble de la suma de las cantidades que recibieran Catalina y Juana. Además, la suma de

las cantidades que recibieran Isabel y Juana debía ser igual al triple de la cantidad que recibiera Catalina. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar cuántas monedas debía recibir cada hija.

b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.
a) Isabel: 240 monedas. Catalina: 90 monedas. Juana: 30 monedas.
b) $\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}$

Septiembre 2015.

(3,5 puntos) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de A.
b) *(1,25 puntos)* Encontrar una matriz X, si existe, tal que $2X+B^2=3A$.
c) *(1 punto)* Sea $C=A+B$. Calcular el rango de C.

SOLUCIÓN.
a) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/10 & -3/10 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ **b)** $X=\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$ **c)** $\text{rg}\, C=2$

Septiembre 2015.
(3,5 puntos) Un agricultor tiene 40 hectáreas de terreno en las que puede plantar cebada o maíz (o no plantar nada). Cada hectárea de cebada necesitará 5 hectómetros cúbicos de agua mientras que cada hectárea de maíz necesitará 10 hectómetros cúbicos de agua. El agricultor podrá disponer de hasta 225 hectómetros cúbicos de agua. El beneficio que obtendrá por cada hectárea de cebada es de 100 euros mientras que por cada hectárea de maíz obtendrá un beneficio de 160 euros; además, las hectáreas en las que no plante nada las arrendará y obtendrá un beneficio de 50 euros por hectárea. La normativa no le permite plantar más hectáreas de maíz que de cebada. ¿Cuántas hectáreas de cebada y cuántas de maíz tiene que plantar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo?

SOLUCIÓN.
15 ha de cebada y 15 ha de maíz. El máximo beneficio es de 4400 euros.

Junio 2016.
(3,5 puntos) Una empresa conservera va a preparar lotes de dos tipos, A y B, con sus productos. En cada lote de tipo A pone 10 frascos de pimientos, 2 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. En cada lote de tipo B pone 4 frascos de pimientos, 5 frascos de espárragos y 1 frasco de alcachofas. Puede utilizar, como máximo, 500 frascos de pimientos, 310 frascos de espárragos y 65 frascos de alcachofas. Sabiendo que por cada lote de tipo A obtiene un beneficio de 10 euros y por cada lote de tipo B obtiene un beneficio de 6 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo tendrá que preparar para que su beneficio sea máximo? ¿Cuál será el valor de ese beneficio máximo?

SOLUCIÓN.
40 lotes de tipo A y 25 lotes de tipo B. El máximo beneficio es de 550 euros.

Junio 2016.
(3,5 puntos)

a) *(2 puntos)* Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 9\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

encontrar, si existe, una matriz X tal que: $5X+3C^2=2AB$

SOLUCIÓN.
$X=\begin{pmatrix}-17/5 & 1/5\\ 7/5 & 64/5\end{pmatrix}$

Septiembre 2016.
(3,5 puntos) Un ganadero puede comprar dos tipos de pienso, A y B, para alimentar a sus cerdos. Cada saco de pienso A contiene 4 kilos de cereales y 2 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 4 euros. Cada saco de pienso B contiene 2 kilos de cereales y 3 kilos de bellotas, además de otros ingredientes, y cuesta 5 euros. Para alimentar a sus cerdos quiere tener, al menos, 160 kilos de cereales y 120 kilos de bellotas. Como tiene que transportar los sacos en su furgoneta, no quiere comprar, entre los dos tipos de pienso, más de 70 sacos. ¿Cuántos sacos de cada tipo de pienso tiene que comprar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

SOLUCIÓN.
30 sacos de tipo A y 20 sacos de tipo B. El coste mínimo es de 220 euros.

Septiembre 2016.
(3,5 puntos)
a) *(2,25 puntos)* Un pintor ha comprado pintura de 3 colores: azul, roja y verde. Cada kilo de pintura azul cuesta 2 euros, cada kilo de pintura roja cuesta 4 euros y cada kilo de pintura verde cuesta 3 euros. En total ha comprado 500 kilos de pintura y se ha gastado 1400 euros. Además, sabemos que la suma de las cantidades de pintura azul y verde es el triple que la cantidad de pintura roja. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar la cantidad de pintura de cada color que ha comprado.

b) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de: $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN.
a) 225 kilos de pintura azul, 125 kilos de pintura roja y 150 kilos de pintura verde. **b)** $\begin{pmatrix}1/4 & 3/8\\ 1/4 & -1/8\end{pmatrix}$