Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

<u>OPCIÓN A</u>

1. *(3,25 puntos)* Un artesano de vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

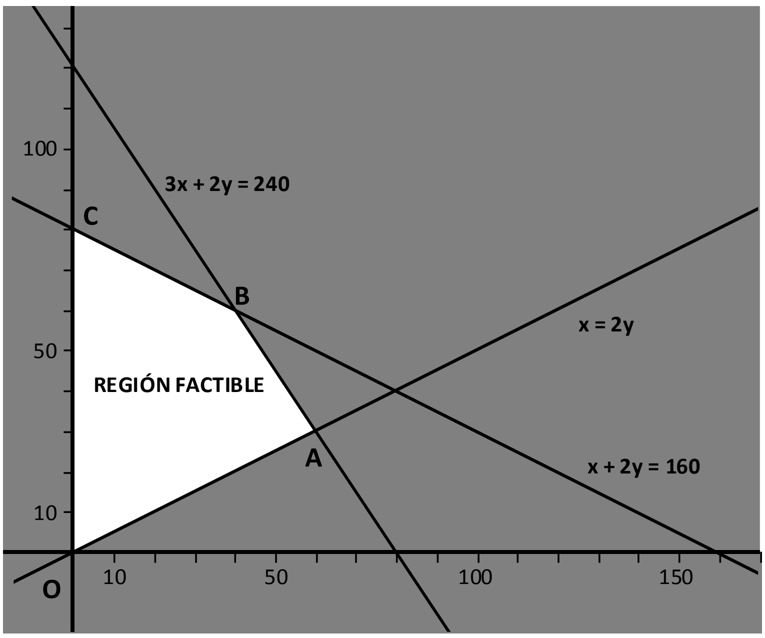
SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de programación lineal. Organicemos los datos en una tabla:

Tipos	Número	Vidrio (kg.)	Trabajo (h.)	Beneficio
Cisne	x	0,1x	$\frac{1}{2}x$	10x
Elefante	y	0,2y	$\frac{1}{3}y$	8y
	$x\geq 0\ ,\ y\geq 0\ ,\ x\leq 2y$	$0{,}1x+0{,}2y\leq 16$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\leq 40$	$F(x\,,y)=10x+8y$

Así pues, la función objetivo es $F(x\,,y)=10x+8y$ que debe ser máxima y las restricciones son el conjunto de desigualdades $\left\{x\geq 0\ ,\ y\geq 0\ ,\ x\leq 2y\ ,\ 0{,}1x+0{,}2y\leq 16\ ,\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\leq 40\right\}$.

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):



▪ La recta x = 0 es el eje de ordenadas. La solución de la inecuación $x\geq 0$ es el semiplano de la derecha (en blanco).

▪ La recta $y=0$ es el eje de abscisas. La solución de la inecuación $y\geq 0$ es el semiplano superior.

▪ La recta $x=2y$ pasa por los puntos $(0\,,0)$ y $(100\,,50)$. La inecuación $x\leq 2y$ tiene por solución el semiplano que contiene al punto $(0\,,10)$.

▪ La recta $0{,}1x+0{,}2y=16\ \Leftrightarrow\ x+2y=160$ pasa por los puntos $(0\,,80)$ y $(160\,,0)$. La solución de la inecuación $0{,}1x+0{,}2y\leq 16$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

▪ La recta $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=40\ \Leftrightarrow\ 3x+2y=240$

pasa por los puntos $(0,120)$ y $(80,0)$. La solución de la inecuación $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y \le 40$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La región factible es entonces el cuadrilátero OABC de la figura. Como la función objetivo se optimiza en alguno de sus vértices, obtengamos las coordenadas de los mismos y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

▪ Vértice $O(0,0) \Rightarrow F(0,0)=0$ €

▪ Vértice A: $\begin{cases} 3x+2y=240 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow 4x=240 \Rightarrow x=60 \;,\; y=30 \Rightarrow A(60,30) \Rightarrow F(60,30)=600+240=840$ €

▪ Vértice B: $\begin{cases} 3x+2y=240 \\ x+2y=160 \end{cases} \Rightarrow 2x=80 \Rightarrow x=40 \;,\; y=60 \Rightarrow B(40,60) \Rightarrow F(40,60)=400+480=880$ €

▪ Vértice $C(0,80) \Rightarrow F(0,80)=0+640=640$ €

Por lo tanto, para maximizar el beneficio debe fabricar 40 cisnes y 60 elefantes. El beneficio máximo será de 880 €.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & si\; x<-2 \\ \dfrac{x+b}{x^2+1} & si\; -2\le x<0 \\ x^3-9x^2+24x+4 & si\; x\ge 0 \end{cases}$$

a) *(1 punto)* Calcular a y b sabiendo que f es continua en todos los puntos

b) *(1,5 puntos)* Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [3,8]$.

c) *(0,75 puntos)* Calcular

$$\int_1^2 f(x)dx$$

SOLUCIÓN.

a) Las tres funciones que definen a $f(x)$ son continuas. Debemos exigir que también lo sea en $x=-2$ y $x=0$. Para ello, debe ser:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -2}(ax+1)=\lim_{x\to -2}\frac{x+b}{x^2+1} \Rightarrow -2a+1=\frac{-2+b}{5} \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x+b}{x^2+1}=\lim_{x\to 0}\left(x^3-9x^2+24x+4\right) \Rightarrow b=4 \quad (*)$$

De las igualdades (*) se sigue: $b=4 \Rightarrow -10a+5=2 \Rightarrow a=\frac{3}{10}$ es decir: $a=\frac{3}{10}$, $b=4$

b) En el intervalo $[3,8]$ la función definida es $f(x)=x^3-9x^2+24x+4$. Veamos si en dicho intervalo la función tiene algún mínimo relativo:

$$f'(x)=3x^2-18x+24=0 \Rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{324-288}}{6}=\frac{18\pm 6}{6}= \begin{cases} 2 \notin [3,8] \\ 4 \in [3,8] \end{cases}$$

$f''(x)=6x-18 \Rightarrow f''(4)>0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo relativo en $x=4$.

El valor mínimo de la función lo alcanzará en el mínimo relativo o en alguno de los extremos del intervalo:

$f(3)=27-81+72+4=22$, $f(4)=64-144+96+4=20$, $f(8)=512-576+192+4=132$ luego el mínimo valor lo tiene en $(4,20)$.

c) $\int_1^2\left(x^3-9x^2+24x+4\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{9x^3}{3}+\frac{24x^2}{2}+4x\right]_1^2=\left[\frac{x^4}{4}-3x^3+12x^2+4x\right]_1^2=(4-24+48+8)-\left(\frac{1}{4}-3+12+4\right)=$

$$= 23 - \frac{1}{4} = \frac{91}{4}$$

3. *(3,5 puntos)* En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luis va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.

a) *(0,75 puntos)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de encestar los dos lanzamientos?

b) *(1 punto)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de ganar el premio?

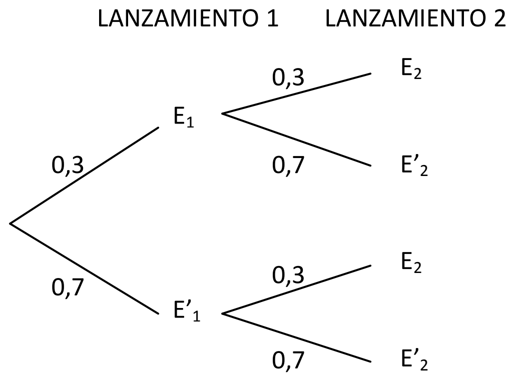
c) *(1 punto)* Si Luis ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?

d) *(0,75 puntos)* Sea *A* el suceso "Luis falla el primer lanzamiento" y *B* el suceso "Luis gana el premio". ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes?

SOLUCIÓN.

Sean E_1 el suceso "encesta el primer lanzamiento" y E_2 el suceso "encesta el segundo lanzamiento". Sea B el suceso "Luis gana el premio".

El diagrama en árbol de la situación es:



a) $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

b) "Gana el premio" es el suceso contrario a "falla los dos lanzamientos":

$$p(B) = 1 - p(E'_1 \cap E'_2) = 1 - p(E'_1) \cdot p(E'_2) = 1 - 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}51$$

c) $p(E'_1/B) = \dfrac{p(E'_1 \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(E'_1).p(B/E'_1)}{p(B)} = \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}51} = \dfrac{0{,}21}{0{,}51} = 0{,}41$

d) El suceso A es el que nosotros hemos denominado E'_1.

A y B son independientes si $p(A/B) = p(A)$. Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} p(A/B) = p(E'_1/B) = 0{,}41 \quad \text{(apartado c)} \\ p(A) = p(E'_1) = 0{,}7 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{los sucesos A y B no son independientes.}$$

OPCIÓN B

1. *(3,25 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Calcular $(AB)^2$.

b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz *X* tal que $2A + 3X = 4C$.

c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de *D*.

SOLUCIÓN.

a) $AB = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 & -115 \\ 230 & 350 \end{pmatrix}$

b) $2A + 3X = 4C \Rightarrow 3X = 4C - 2A \Rightarrow X = \frac{1}{3} \cdot (4C - 2A) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -16 & -6 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 6 & -6 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & 2 & -2 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

c) Veamos si la matriz D tiene inversa:

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-4-12+6 = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } D)^*} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 8 \\ 1 & -6 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } D)^t} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -6 & -6 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{D^{-1} = (\text{Adj } D)^t / |D|} \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Adjuntos:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -6$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 8$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -6$,

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 4$, $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$

Luego: $D^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & -1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. *(3,25 puntos)* Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función:

$$C(x) = \frac{1}{200}(-x^2 + 100x + 7500)$$

donde $x \in [0,\ 120]]$ es el tiempo (en minutos) transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla, en porcentaje.

a) *(0,75 puntos)* Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.

b) *(1,5 puntos)* ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y máxima cuotas de pantalla del programa? ¿Cuáles fueron dichas cuotas?

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_{10}^{20} C\,(x)dx$$

SOLUCIÓN.

a) $C(x) = \frac{1}{200}\left(-x^2 + 100x + 7500\right) = 18 \Rightarrow -x^2 + 100x + 7500 = 3600 \Rightarrow -x^2 + 100x + 3900 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-100 \pm \sqrt{10000 + 15600}}{-2} = \frac{-100 \pm 160}{-2} = \begin{cases} -40 \\ 130 \end{cases}$ ambos valores no son válidos (uno por negativo y el otro por ser mayor que 120). Por tanto no hubo ningún momento en que la cuota de pantalla fuera del 18%.

b) $C'(x) = \frac{1}{200}\left(-2x + 100\right) = 0 \Rightarrow x = 50$ $\qquad C''(x) = \frac{1}{200}\left(-2\right) < 0 \Rightarrow x = 50$ es un máximo relativo

Veamos cuál es el valor de la función en los extremos del intervalo $\left[0\,,120\right]$ y en $x = 50$:

$C(0) = \frac{1}{200}(7500) = 37{,}5\ \%$; $C(120) = \frac{1}{200}\left(-14400 + 12000 + 7500\right) = 25{,}5\ \%$;

$C(50) = \frac{1}{200}\left(-2500 + 5000 + 7500\right) = 50\ \%$

Luego la mínima cuota de pantalla se produjo en el minuto 120 y fue del 25,5% y la máxima en el minuto 50 con un 50%.

c) $\int_{10}^{20} C(x)\,dx = \int_{10}^{20} \frac{1}{200}\left(-x^2 + 100x + 7500\right)dx = \frac{1}{200}\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{100x^2}{2} + 7500x\right]_{10}^{20} =$

$$=\frac{1}{200}\left[\left(-\frac{8000}{3}+20000+150000\right)-\left(-\frac{1000}{3}+5000+75000\right)\right]=\frac{90000-\frac{7000}{3}}{200}=\frac{263000}{600}=\frac{1315}{3}\simeq 438{,}3$$

3. *(3,5 puntos)*

a) *(1 punto)* En un instituto hay 335 estudiantes de Bachillerato, 195 de los cuales están en primer curso y 140 están en segundo curso. Se eligen al azar dos estudiantes distintos de entre estos 335. ¿Cuál es la probabilidad de que estén en el mismo curso?

b) (*2,5 puntos)* En una encuesta sobre hábitos alimentarios en una ciudad se ha tomado una muestra de 300 individuos y se les ha preguntado si son vegetarianos. De los 300 individuos, 72 son vegetarianos y los 228 restantes no lo son. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de personas de la ciudad que son vegetarianas.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

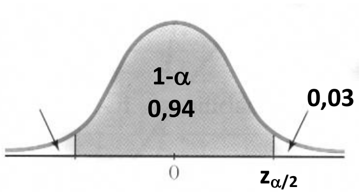
SOLUCIÓN

a) Sean P_1 el suceso "el primer estudiante es de primer curso", P_2 el suceso "el segundo estudiante es de primer curso", S_1 el suceso "el primer estudiante es de segundo curso" y S_2 el suceso "el segundo estudiante es de segundo curso". Se tiene:

$$p\left[(P_1\cap P_2)\cup(S_1\cap S_2)\right]=p(P_1\cap P_2)+p(S_1\cap S_2)=p(P_1)\cdot p(P_2/P_1)+p(S_1)\cdot p(S_2/S_1)=\frac{195}{335}\cdot\frac{194}{334}+\frac{140}{335}\cdot\frac{139}{334}=$$

$$=\frac{37830}{111890}+\frac{19460}{111890}=\frac{57290}{111890}=0{,}51$$

b) Calculemos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 94%:



$$1-\alpha=0{,}94 \;\Rightarrow\; \alpha=0{,}06 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=0{,}03 \;\Rightarrow\; 1-\frac{\alpha}{2}=1-0{,}03=0{,}97$$

Buscamos en la tabla el valor más aproximado a 0,97 (0,9699) que se corresponde con un valor crítico $z_{\alpha/2}=1{,}88$.

La proporción de personas vegetarianas en la muestra es: $pr = \frac{72}{300} = 0,24$.

El error máximo admisible o cota de error es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} = 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,24 \cdot 0,76}{300}} = 0,046$

El intervalo de confianza pedido es entonces: $(0,24 - 0,046\, ; 0,24 + 0,046) = (0,194\, ; 0,286)$

Es decir, con un nivel de confianza del 94% hay entre un 19,4% y un 28,6% de personas vegetarianas en la ciudad.