

Septiembre 1994

OPCIÓN A.

1. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Calcular el rango de A. (3 puntos)
b) Discutir si existe solución y resolver, caso de que sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3 puntos)

- c) Cambiando una sola ecuación, convertir el sistema de ecuaciones lineales del apartado b en un sistema que tenga infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones. (4 puntos)

SOLUCIÓN.

- a) Utilicemos las transformaciones elementales para conseguir una matriz triangular del mismo rango que la dada:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

Transformaciones elementales realizadas: $F_2 - F_1$, $F_3 - F_1$

b)

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y, como es homogéneo, su única solución es: $x = y = z = 0$

- c) Basta con sustituir la tercera ecuación (por ejemplo) por una combinación lineal de las otras dos: $E_3 = E_1 + E_2$

En este caso, el sistema queda: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\lambda, y = 0, z = \lambda$

Transformaciones elementales: (1) $E_2 - E_1$, $E_3 - 2E_1$

2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple las siguientes condiciones:

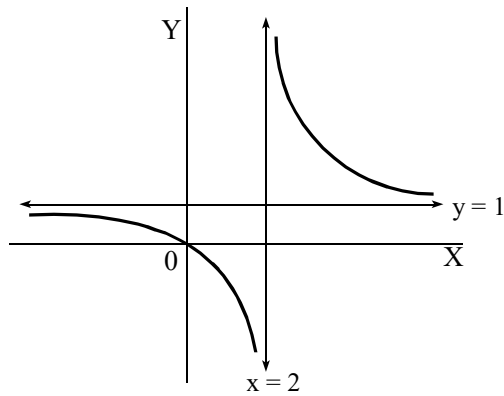
i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ iii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ iv) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ v) $f(0) = 0$

Se pide:

- a) Dibujar la gráfica de una función f que verifique las cinco condiciones anteriores. (Razonar la gráfica dibujada). (4 puntos)
b) Dar la ecuación de la función representada en el apartado anterior. (Razonar la respuesta). (2 puntos)
c) Representar la gráfica de la función $g(x) = \frac{x}{x-2}$ haciendo un estudio de su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad. (4 puntos)

SOLUCIÓN.

a)



La gráfica cumple todas y cada una de las condiciones exigidas:

X tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 1$ como indican las dos primeras condiciones.

X tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 2$ como indican las condiciones tercera y cuarta.

X pasa por el origen de coordenadas como indica la quinta condición.

b) La ecuación es $f(x) = \frac{x}{x-2}$ pues tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 2$ (ya que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$), una asíntota horizontal de ecuación $y = 1$ (ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$) y pasa por el origen de coordenadas,

c) La gráfica es la del apartado a). Estudiemos su crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad:

$$g(x) = \frac{x}{x-2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} \Rightarrow g''(x) = \frac{4}{(x-2)^3}$$

X Como $g'(x) < 0 \quad \forall x \Rightarrow g(x)$ es decreciente en todo su dominio

X $g''(x) < 0$ para $x < 2$ luego $g(x)$ es cóncava en $(-\infty, 2)$

$g''(x) > 0$ para $x > 2$ luego $g(x)$ es cóncava en $(2, \infty)$

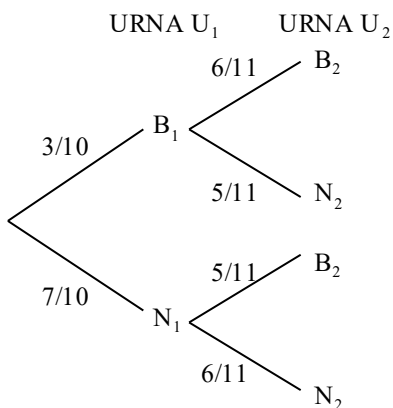
3. Se tiene dos urnas U_1 y U_2 , con bolas blancas y negras. La composición de las urnas es la siguiente: la U_1 contiene tres bolas blancas y siete negras, la U_2 contiene cinco blancas y cinco negras. Se saca una bola de la urna U_1 y se coloca en la U_2 , sin mirarla; luego se saca una bola de la urna U_2 . Se pide:

a) La probabilidad de que la bola que se saca de U_2 sea blanca. (5 puntos)

b) Sabiendo que la bola que se saca de la urna U_2 es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola que se pasó de la urna U_1 a la U_2 fuera blanca? (5 puntos)

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) + p(N_1) \cdot p(B_2 / N_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{11} + \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{18}{110} + \frac{35}{110} = \frac{53}{110} \approx 0,48$$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(B_1 / B_2) = \frac{p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1)}{p(B_1) \cdot p(B_2 / B_1) + p(N_1) \cdot p(B_2 / N_1)} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{6}{11}}{\frac{3}{10} \cdot \frac{6}{11} + \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{11}} = \frac{\frac{18}{110}}{\frac{18}{110} + \frac{35}{110}} = \frac{18}{53} \approx 0,34$$

Septiembre 1994

OPCIÓN B.

1. Un camión puede transportar como máximo 9 toneladas de mercancía por viaje. En un cierto viaje desea transportar al menos 4 toneladas de la mercancía A, y un peso de la mercancía B que no sea inferior a la mitad del peso que transporta de A. Sabiendo que se cobra 3000 pesetas por tonelada de A transportada y 2000 pesetas por tonelada de B, se quiere saber cuántas toneladas de A y B se deben cargar en el camión para obtener la ganancia máxima. Para ello se pide:

- a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) (5 puntos)
 b) Representar la región factible. (2,5 puntos)
 c) Resolver el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

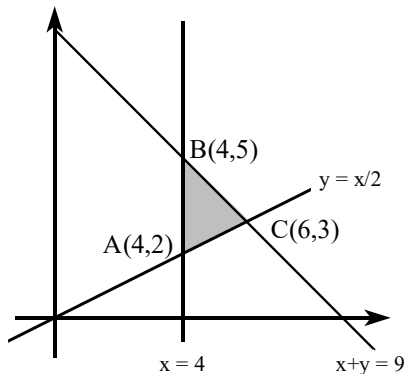
Mercancía	Nº de toneladas	Ganancia
A	x	3000x
B	y	2000y
	$x \geq 0$ $x \geq 4$ $y \geq 0$ $y \geq \frac{x}{2}$ $x + y \leq 9$	$F(x, y) = 3000x + 2000y$

a) X Función objetivo (máxima): $F(x, y) = 3000x + 2000y$

X Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 4 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ x + y \leq 9 \end{cases}$$

b)



Obtención de los vértices de la región factible:

Vértice A: $\begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 2$

Vértice B: $\begin{cases} x = 4 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 5$

Vértice C: $\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 6, y = 3$

c) La solución está en alguno de los vértices de la región factible. Sustituimos las coordenadas de cada vértice en la función objetivo y observemos el valor que tiene:

$F(4, 2) = 16\ 000$, $F(4, 5) = 22\ 000$, $F(6, 3) = 24\ 000 \Rightarrow$ la máxima ganancia se obtendrá cargando 6 toneladas de A y 3 toneladas de B

2. Dada la función $y = x^3 + x - 2$, se pide:

- a) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Razonar si existen máximos y mínimos, y en caso de que existan, calcularlos. (3 puntos)
 b) Dar los intervalos de concavidad y convexidad de la función. Razonar si existen puntos de inflexión, y en caso de que existan, calcularlos. (3 puntos)
 c) Representar la gráfica de la función. (2 puntos)
 d) Dar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$. (2 puntos)

SOLUCIÓN.

a) El crecimiento y decrecimiento de la función dependen del signo de la primera derivada: $y' = 3x^2 + 1$

Puesto que $y' > 0 \forall x \Rightarrow$ la función es siempre creciente

No puede tener máximos ni mínimos porque $y' \neq 0$

b) La concavidad y la convexidad dependen del signo de la segunda derivada: $y'' = 6x$

Como $y'' < 0$ para $x < 0 \Rightarrow$ la función es convexa en $(-\infty, 0)$.

Como $y'' > 0$ para $x > 0 \Rightarrow$ la función es cóncava en $(0, \infty)$.

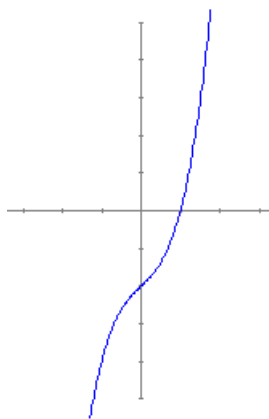
Los posibles puntos de inflexión son las soluciones de la ecuación $y'' = 0$. En este caso: $6x = 0 \Rightarrow x = 0$. Como $y''' = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en $(0, -2)$.

c) Las funciones polinómicas no tienen asíntotas. Además: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Calculemos los puntos de corte con los ejes: con OX: $\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 + x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1: (1, 0)$

con OY: $\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 + x - 2 \end{cases} \Rightarrow y = -2: (0, -2)$

La gráfica será:



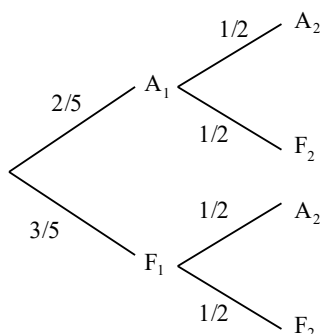
d) Ecuación de la recta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde: $m = f'(0) = 1$ y $(x_0, y_0) = (0, -2)$. Por tanto, la ecuación es: $y + 2 = x \Rightarrow y = x - 2$

3. Dos tiradores disparan sobre una diana. Uno tiene dos aciertos cada cinco disparos y el otro un acierto cada dos disparos. Si los dos disparan al mismo tiempo, se pide contestar razonadamente a las siguientes preguntas:

- a) La probabilidad de que los dos acierten. (2,5 puntos)
- b) La probabilidad de que alguno acierte. (2,5 puntos)
- c) La probabilidad de que ninguno acierte. (2,5 puntos)
- d) La probabilidad de que uno acierte y el otro no. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) $p(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} = 0,2$

b) $1 - p(F_1 \cap F_2) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = 1 - 0,3 = 0,7$

c) $p(F_1 \cap F_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = 0,3$

d) $p = p(A_1 \cap F_2) + p(F_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = 0,5$