OPCIÓN A

1. Hallar en función de *a* el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$ [1,5 puntos] y calcular cuando exista la matriz inversa $A^{!1}$ en los casos a = 1 y a = !1 [1 punto].

SOLUCIÓN.

Puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ El rango de la matriz A es 2, como mínimo.

Veamos para qué valores del parámetro a el rango es 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & -3 \\ 4 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 4a + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

Por tanto:
X Para $a = -1$ o $a = -3$: rg A = 2
X Para $a \neq -1$ y $a \neq -3$: rg A = 3

X A^{-1} existe cuando $|\,A\,| \neq 0$. Por tanto, cuando $a = -1$, $\nexists\, A^{-1}$.

Para $a = 1$: $|\,A\,| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 3 = 8$. Tenemos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \operatorname{Adj}\left(A^t\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{\operatorname{Adj}\left(A^t\right)}{|\,A\,|} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 & 1/8 \\ -3/2 & 5/8 & 3/8 \\ -1/2 & -1/8 & 1/8 \end{pmatrix}}$$

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$, se pide:

i) Hallar su dominio de definición. [0,5 puntos]
ii) Hallar el punto o puntos en los que la gráfica de la curva $y = f(x)$ tiene tangente horizontal. [1,5 puntos]
iii) Dibujar esta curva en un pequeño entorno de cada uno de estos puntos. [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

i) Las funciones numerador (exponencial) y denominador (polinómica) tienen por dominio ¡ . Como se trata de una función racional, y el denominador se anula para $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$, su dominio es: ¡ $-\left\{ -\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3} \right\}$

ii) Serán los puntos en los que $f'(x) = 0$: $\quad f'(x) = \dfrac{e^x \cdot \left(x^2 - 3\right) - e^x \cdot 2x}{\left(x^2 - 3\right)^2} = \dfrac{e^x \cdot \left(x^2 - 2x - 3\right)}{\left(x^2 - 3\right)^2} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$ luego la tangente es horizontal en $x = -1$ y en $x = 3$.

iii) Comprobaremos si los puntos de tangente horizontal son puntos de mínimo o de máximo relativo:

$$f''(x)=\frac{\left[e^x\left(x^2-2x-3\right)+e^x\left(2x-2\right)\right]\cdot\left(x^2-3\right)^2-e^x\left(x^2-2x-3\right)\cdot 2\left(x^2-3\right)2x}{\left(x^2-3\right)^4}$$

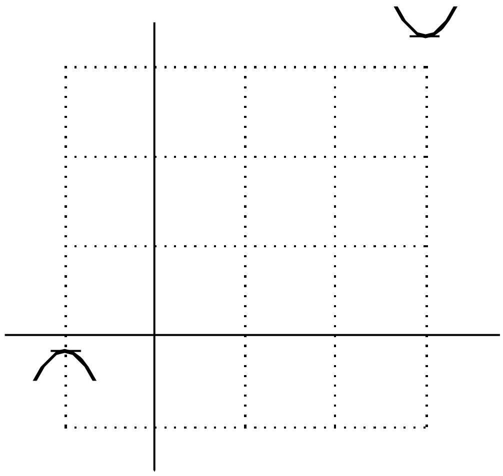
X $\quad f''(-1)=\dfrac{\left[e^{-1}\cdot 0+e^{-1}\cdot(-4)\right]\cdot(-2)^2-e^{-1}\cdot 0}{16}=\dfrac{-16e^{-1}}{16}<0 \quad\Rightarrow\quad$ En $x=-1$ la función tiene un máximo relativo:

$$f(-1)=\frac{e^{-1}}{-2}=-\frac{1}{2e}\ ;\ -0{,}18 \quad\Rightarrow\quad \left(-1\ ,\ -0{,}18\right)\ \text{máximo}$$

X $\quad f''(3)=\dfrac{\left[e^3\cdot 0+e^3\cdot 4\right]\cdot 6^2-e^3\cdot 0}{6^4}=\dfrac{4\cdot 6^2\cdot e^3}{6^4}>0 \quad\Rightarrow\quad$ En $x=3$ la función tiene un mínimo relativo:

$$f(3)=\frac{e^3}{6}\ ;\ 3{,}35 \quad\Rightarrow\quad \left(3\ ,\ 3{,}35\right)\ \text{mínimo}$$

Se tiene por tanto:



3. Hallar el valor de *m* (que supondremos positivo) para que el área delimitada por la parábola $y=x^2$ y la recta $y=mx$ valga 36 (unidades de área) [2,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Definimos la función diferencia: $y=mx-x^2$ (siendo la función $y=x^2$ una parábola que tiene su mínimo en el origen, la gráfica de la recta $y=mx$ está “por encima” de la parábola en el primer cuadrante).

El área delimitada por ambas funciones es igual a la que delimitan la función diferencia y el eje OX:

- Puntos de corte con OX: $mx-x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x\left(m-x\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x=0\ ,\ x=m$

- La superficie es de 36 u^2:

$$S=\int_0^m\left(mx-x^2\right)dx=\left[\frac{mx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^m=\frac{m^3}{2}-\frac{m^3}{3}=36 \quad\Rightarrow\quad 3m^3-2m^3=216 \quad\Rightarrow\quad m^3=216 \quad\Rightarrow\quad \boxed{m=6}$$

4. Se sabe que el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ vale 3 y que el módulo del vector $\vec{v} \times \vec{w}$ es 1. Se pide:

i) Hallar razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D sabiendo que $\vec{AB} = \vec{u} - \vec{v}$, $\vec{AC} = \vec{w}$ y $\vec{AD} = \vec{w} + 2\vec{v}$ [1,5 puntos].

ii) Hallar razonadamente la longitud de la altura de dicho tetraedro que une el vértice B con la cara ACD [1 punto]

SOLUCIÓN.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 3 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{u}|\,|\vec{v}\times\vec{w}|\cos\alpha = 3 \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{u}|\cos\alpha = 3 \quad \alpha = (\vec{u}\,,\,\vec{v}\times\vec{w})$$

i)
$$\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD}\right] = \frac{1}{6}\left[\vec{u}-\vec{v}\ ,\ \vec{w}\ ,\ \vec{w}+2\vec{v}\right] = \frac{1}{6}\left[(\vec{u}-\vec{v})\cdot\left[\vec{w}\times(\vec{w}+2\vec{v})\right]\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[(\vec{u}-\vec{v})\cdot\left[(\vec{w}\times\vec{w})+2\,(\vec{w}\times\vec{v})\right]\right] = \frac{1}{6}\left[(\vec{u}-\vec{v})\cdot\left[\vec{0}-2\,(\vec{v}\times\vec{w})\right]\right] = \frac{1}{6}\left[(\vec{u}-\vec{v})\cdot\left[-2\,(\vec{v}\times\vec{w})\right]\right] =$$
$$= \frac{1}{6}\left[-2\left[\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right]+2\left[\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})\right]\right] = \frac{1}{6}\cdot(-2)\cdot 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad V = 1\ u^3$$

ii)
$$V = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD}\right] = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right] = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right) = 1$$

Por otra parte: $h = \left|\overrightarrow{AB}\right|\ \cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right) \ \Rightarrow\ h = \dfrac{6}{\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{6}{\left|\vec{w}\times(\vec{w}+2\vec{v})\right|} = \dfrac{6}{\left|\vec{w}\times\vec{w}+2\,(\vec{w}\times\vec{v})\right|} =$

$$= \frac{6}{\left|-2\,(\vec{v}\times\vec{w})\right|} = \frac{6}{2} = 3\ u$$

OPCIÓN B

1. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar a partir de estos lingotes uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes? [2,5 puntos].

SOLUCIÓN.

Sean x , y , z el nº de gramos de cada uno de los tres lingotes. Cada lingote pesa 100 grs y, por tanto, la cantidad que contienen de cada uno de los metales es su tanto por ciento. Se tiene:
$$\begin{cases} 0{,}2\,x+0{,}1\,y+0{,}2\,z=15 \\ 0{,}2\,x+0{,}4\,y+0{,}4\,z=35 \\ 0{,}6\,x+0{,}5\,y+0{,}4\,z=50 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{vmatrix} = 0{,}032+0{,}024+0{,}02-0{,}048-0{,}008-0{,}04 = -0{,}02$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 35 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 50 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{vmatrix}}{-0{,}02} = \frac{2{,}4+2+3{,}5-4-1{,}4-3}{-0{,}02} = \frac{-0{,}5}{-0{,}02} = 25$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0,2 & 15 & 0,2 \\ 0,2 & 35 & 0,4 \\ 0,6 & 50 & 0,4 \end{vmatrix}}{-0,02} = \frac{2,8+2+3,6-4,2-1,2-4}{-0,02} = \frac{-1}{-0,02} = 50$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0,2 & 0,1 & 15 \\ 0,2 & 0,4 & 35 \\ 0,6 & 0,5 & 50 \end{vmatrix}}{-0,02} = \frac{4+1,5+2,1-3,6-1-3,5}{-0,02} = \frac{-0,5}{-0,02} = 25$$

Por tanto, debemos coger 25 grs del primer lingote, 50 grs del segundo y 25 grs del tercero.

2. Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$, se pide:

i) Hallar su dominio de definición. [0,5 puntos]
ii) Hallar, si los tiene, sus extremos relativos. [1 punto]
iii) Hallar, si las tiene, las asíntotas horizontales de la curva $y = f(x)$. [1 punto]

SOLUCIÓN.

i) $x^2 - 4 \geq 0 \;\Rightarrow\; (x+2)\cdot(x-2) \geq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow [2, +\infty] \\ \begin{cases} x+2 \leq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow [-\infty, -2] \end{cases}$

Por tanto: $D(f) = [-\infty, -2] U [2, +\infty] =$ ¡ $-(-2, 2)$

ii) $f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{x^2-4} \;\Rightarrow\; x^2 - x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1-16}}{2} \;\Rightarrow$ no tiene extremos relativos

iii) Veamos las tendencias de la función cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$:

X $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2-4} - (x+2)\right] = \infty - (-\infty) = \infty \;\Rightarrow$ no existe asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

X $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-4} - x - 2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2-4} - (x+2)\right]\cdot\left[\sqrt{x^2-4} + (x+2)\right]}{\sqrt{x^2-4} + (x+2)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4 - \cancel{x^2} - 4x - 4}{\sqrt{x^2-4} + (x+2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-\frac{4x+4}{\sqrt{x^2-4} + (x+2)}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-\frac{4x}{x+x}\right] = -2 \;\Rightarrow$

$y = -2$ es una asíntota horizontal de la función (cuando $x \to +\infty$)

3. Hallar el punto P de la curva $y = \sqrt{x}$ más próximo al punto $Q = \left(\frac{19}{2} \,,\, 0 \right)$ [1,5 puntos]. ¿Qué ángulo forman la recta que une P y Q y la tangente a la curva en el punto P? [1 punto]

SOLUCIÓN.

$$P\left(x \,,\, \sqrt{x}\right). \qquad d = d\left(P \,,\, Q\right) = \sqrt{\left(x - \frac{19}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 - 19x + \frac{361}{4} + x} = \sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}}$$

Veamos cuándo la distancia entre ambos puntos es mínima:

$$d' = \frac{2x - 18}{2\sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}}} = \frac{x - 9}{\sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

$$d'' = \frac{\sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}} - (x - 9) \cdot \frac{2x - 18}{2\sqrt{x^2 - 18x + \frac{361}{4}}}}{x^2 - 18x + \frac{361}{4}} \quad \Rightarrow \quad d''(9) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Para } x = 9 \text{ la distancia es mínima.}$$

Por tanto: $P\left(9 \,,\, 3\right)$

X $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2} \,,\, -3 \right) \quad \Rightarrow$ la pendiente de la recta PQ es $m_1 = \dfrac{-3}{\frac{1}{2}} = -6$

La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P es: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \dfrac{1}{6}$

Como las pendientes son inversas y opuestas las dos rectas son perpendiculares.

4. Dadas la recta $r : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + 2z + 4 = 0 \end{cases}$ y la recta s determinada por los puntos $P\ (1, 2, 0)$ y $Q\ (a, a, 1)$, se pide hallar a para que estas rectas estén contenidas en un plano [1,5 puntos]. Escribir la ecuación general de dicho plano [1 punto]

SOLUCIÓN.

X La ecuación de todos los planos que contienen a r (haz de planos) es: $\left(x + y + z - 1\right) + \lambda \left(x - 2y + 2z + 4\right) = 0$

De entre ellos, el que contiene al punto P es: $\left(1 + 2 + 0 - 1\right) + \lambda \left(1 - 4 + 0 + 4\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$ es decir: $x + y + z - 1 - 2\left(x - 2y + 2z + 4\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x + 5y - 3z - 9 = 0 \equiv \pi$

Si ahora hacemos que $Q \in \pi$: $\quad -a + 5a - 3 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4a = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 3$

X La ecuación del plano ya ha sido obtenida: $\pi \equiv -x + 5y - 3z - 9 = 0$