El número e y la prueba del carbono 14

Hablamos sobre una curiosa aparición del número e y su utilidad para datar muestras

Pinturas rupestres encontradas en el Sáhara. WIKIPEDIA

Miguel Ángel Morales (19 ABR 2017 El País)

El número Pi, por todos conocido, aparece en multitud de fórmulas e igualdades, como la identidad de Euler, y está relacionado con una buena cantidad de situaciones reales (por ejemplo, aparece en el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de muchas figuras). Pero no es el único número *curioso* que aparece de manera recurrente relacionado con fenómenos de nuestro día a día.

Otro caso parecido al de Pi es el del **número e** (que, por cierto, también aparece en la identidad de Euler). Aunque las formas que conocemos para definirlo pueden parecer extrañas, la realidad es que aparece en muchas situaciones conocidas por todos, por lo que su utilidad práctica queda fuera de toda duda. Hoy vamos a hablar de una de ellas: **la prueba del carbono 14**, o **datación por radiocarbono**, que fue desarrollada por **Willard Libby** a finales de los años 40 del siglo pasado.

Todos hemos oído hablar sobre esta prueba, y sabemos que nos ayuda a datar restos (calcular cuántos años tienen), aunque no tengamos muy claro cómo funciona y por qué es fiable. Vamos a intentar dar unas ideas sobre esta técnica (sin entrar en demasiados detalles) para intentar aclarar esos puntos, deteniéndonos un poco más en la parte matemática.

El **Carbono 14** es un isótopo radiactivo (inestable) del Carbono, que tiene otros dos isótopos, Carbono 12 y Carbono 13, que sí son estables. Este isótopo Carbono 14 se genera espontáneamente en la atmósfera y, por otro lado, desaparece en parte por desintegración radiactiva. Estos dos procesos están equilibrados, por lo que dan como resultado que la cantidad de Carbono 14 permanece constante en, por decirlo de alguna forma, *nuestro mundo*.

Los seres vivos asimilan Carbono 14 a través de las plantas (que lo asimilan por fotosíntesis), pero dejan de asimilarlo cuando mueren, momento en el que ese Carbono 14 comienza a desaparecer del ser vivo por desintegración. Por tanto, si vemos qué cantidad de Carbono 14 queda en una muestra y comparamos dicha cantidad con la que tiene una muestra viva, podemos *ir hacia atrás* y calcular su edad.

Para ello, todavía nos faltan algunas cosas. Una de ellas es saber la rapidez con la que se desintegra el Carbono 14. Bien, pues sobre esto sabemos que **la velocidad de desintegración de materia radiactiva a lo largo del tiempo es proporcional a la cantidad de dicha materia radiactiva**. Esto lo sabemos gracias a los estudios de **Ernest Rutherford** y **Frederick Soddy** a principios del siglo XX.

Por otro lado, también sabemos que el **período de semidesintegración** o **semivida** del Carbono 14 es de 5730 años. Esto significa que, dada una muestra inicial a estudio, después de 5730 años se habrá desintegrado la mitad del Carbono 14 que contenía dicha muestra en un principio.

Si llamamos y a la cantidad de Carbono 14 de nuestra muestra, y tenemos en cuenta que esta cantidad depende del tiempo, tenemos que y es una función de t: $y(t)$. Sabiendo que la velocidad corresponde con la derivada, que sería $y'(t)$, y teniendo en cuenta que la velocidad es proporcional a la cantidad, se tiene que la relación que tenemos entre ellas es la siguiente:

$$y'(t) = -K \cdot y(t)$$

La constante de proporcionalidad $K>0$ se llama **constante de desintegración radiactiva**, y el signo – aparece porque la cantidad va disminuyendo al desintegrarse.

Esta relación es una **ecuación diferencial**, que en este caso es sencilla de resolver (es de variables separables) teniendo en cuenta que $y'(t)$ es la derivada de $y(t)$ respecto del tiempo t. Aquí os dejo la resolución de la misma:

$$y' = -K \cdot y \longrightarrow \frac{dy}{dt} = -K \cdot y \longrightarrow \frac{dy}{y} = -K \cdot dt$$

Integramos:

$$ln(y) = -K \cdot t + C$$

Ahora despejamos $y(t)$ utilizando que la función inversa del logaritmo neperiano es la exponencial. Obtenemos, después de unos cálculos (relativamente) sencillos, que la expresión de la cantidad de Carbono 14 es la siguiente:

$$\boxed{\text{Solución de la ecuación diferencial: } y(t) = A \cdot e^{-Kt}}$$

¡¡Apareció el número e!!

Nos quedan constantes por calcular A y K. Para ello, necesitamos un par de datos. Normalmente tendremos la cantidad inicial de Carbono 14 por comparación con una muestra viva (cantidad a tiempo 0):

$$y(0) = y_0$$

y también disponemos de la **semivida** de la que hablábamos antes, que en este caso es T=5730 años.

Con todo esto, ya podemos calcular las constantes. Es sencillo ver, utilizando la condición que nos da la cantidad inicial, que $A=y_0$. Por otro lado, usaremos el dato de la semivida (es decir, que $y(T)=y_0/2$) para calcular K y así obtener la solución final de la ecuación diferencial:

$$\frac{y_0}{2} = y_0 \cdot e^{-K \cdot T} \longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-K \cdot T}$$

$$ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln\left(e^{-K \cdot T}\right) \longrightarrow -ln(2) = -K \cdot T$$

$$K = \frac{ln(2)}{T} \longrightarrow \text{Solución final: } y(t) = y_0 \cdot e^{-\frac{t \cdot ln(2)}{T}}$$

Ya lo tenemos todo. Ahora, dada una muestra *muerta*, tendríamos que comparar la cantidad de Carbono 14 que contiene con la cantidad que hay en una muestra viva para saber cuánto se ha desintegrado, y aplicar la expresión anterior para ver cuánto hace que dicha muestra *murió*.

Veamos un ejemplo. Supongamos que encontramos una muestra fósil (*muerta*) y al compararla con una muestra *viva* obtenemos que solamente queda un 15% de Carbono 14. Si la muestra *viva* tiene una cantidad y_0 de Carbono 14, la *muerta* tendrá $0'15 \cdot y_0$. Calculemos ahora la edad del fósil:

$$0'15 \cdot y_0 = y_0 \cdot e^{-\frac{t \cdot ln(2)}{T}} \longrightarrow 0'15 = e^{-\frac{t \cdot ln(2)}{T}}$$

$$ln(0'15) = -\frac{t \cdot ln(2)}{T} \longrightarrow t = -\frac{T \cdot ln(0'15)}{ln(2)}$$

Usando ahora que T=5730, **la edad de dicho fósil será, aproximadamente, de unos 15682 años**.

Es interesante comentar que esta prueba, por la *corta* semivida del Carbono 14, sirve para datar muestras de, como mucho, unos 50000 años. Y también conviene comentar que se toma como fecha base para *tirar hacia atrás* el año 1950, ya que desde ese año ha habido fluctuaciones significativas en las cantidades de esta sustancia por las pruebas nucleares realizadas desde ese momento. Seguro que hay muchos detalles técnicos relacionados con todo esto que me he dejado sin comentar (y, posiblemente, alguna que otra imprecisión *química*), pero el objetivo del artículo era dar una visión *matemática* del asunto.

Como último dato sobre la datación por radiocarbono, comentar que fue decisiva para desmentir que la conocida como **Sábana Santa** fuera en realidad un sudario de la época en la que, supuestamente, vivió Jesucristo, ya que mediante este proceso se estableció que dicho sudario provenía de, aproximadamente, el siglo XIII.

Como podéis ver, hay otros números *extraños*, además de Pi, que tienen importancia e interés en la vida diaria. Este número *e* es, posiblemente, el máximo exponente de todos ellos, ya que tanto él como su función asociada, la exponencial, aparecen en muchos procesos naturales. El conocimiento de este número y esta función y de sus propiedades nos puede ayudar en muchas situaciones, como la descrita en este artículo. Si conocéis alguna más, estaremos muy agradecidos si nos las contáis en los comentarios.