1. ÁLGEBRA

Opción A

a) *[1,5 puntos]* Discutir y resolver en función de los valores del parámetro *m* el sistema lineal $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ mx+m^2y+m^2z=1 \\ mx+my+m^2z=1 \end{array}\right.$

b) *[1 punto]* Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, determinar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$.

SOLUCIÓN.

a) Las matrices de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 & 1 \\ m & m & m^2 & 1 \end{array}\right)$

Estudiemos los valores del parámetro para los que el rango de A es el máximo posible:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^4+m^3+m^2-m^3-m^3-m^3 = m^4-2m^3+m^2=0 \;\Rightarrow\; m^2\left(m^2-2m+1\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; m^2\left(m-1\right)^2=0 \;\Rightarrow\; m=0 \;,\; m=1$$

▪ Para $m \neq 0$ y $m \neq 1$: $\text{rg } A = \text{rg } B = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Para resolverlo, utilizamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & m^2 \\ 1 & m & m^2 \end{vmatrix}}{m^2\left(m-1\right)^2} = \frac{m^4+m^2+m-m^2-m^2-m^3}{m^2\left(m-1\right)^2} = \frac{m^4-m^3-m^2+m}{m^2\left(m-1\right)^2} = \frac{m\left(m^3-m^2-m+1\right)}{m^2\left(m-1\right)^2} = \frac{\left(m+1\right)\left(m-1\right)^2}{m\left(m-1\right)^2} = \frac{m+1}{m}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow\; m^3-m^2-m+1=\left(m-1\right)\left(m^2-1\right)=\left(m+1\right)\left(m-1\right)^2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m^2 \\ m & 1 & m^2 \end{vmatrix}}{m^2\left(m-1\right)^2} = \frac{0}{m^2\left(m-1\right)^2} = 0$$ (en el determinante del numerador la segunda y tercera filas son iguales)

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m & m & 1 \end{vmatrix}}{m^2\left(m-1\right)^2} = \frac{m^2+m^2+m-m^3-m-m}{m^2\left(m-1\right)^2} = \frac{-m^3+2m^2-m}{m^2\left(m-1\right)^2} = \frac{m\left(-m^2+2m-1\right)}{m^2\left(m-1\right)^2} = \frac{-\left(m-1\right)^2}{m\left(m-1\right)^2} = -\frac{1}{m}$$

▪ Para $m=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{rg } A = 1 \\ \text{rg } B = 2 \end{array} \Rightarrow \text{rg } A \neq \text{rg } B \Rightarrow$ el sistema es incompatible

▪ Para $m=1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } B = 1 \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

Resolución: utilizando las incógnitas "y" y "z" como parámetros: $x = 1-\lambda-\mu \quad ; \quad y = \lambda \quad ; \quad z = \mu$

b) $$\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/a & 0 & 1 \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/a & 1/a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

La propiedad utilizada ha sido la de sacar factor común en alguna de las líneas del determinante.

Opción B

a) *[1,25 puntos]* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la inversa de la matriz A^n.

b) [1,25 puntos] Estudiar para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $P(x) = a + bx + cx^2$ que satisface $P(0) = \alpha$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$.

SOLUCIÓN.

a) Calculemos A^n:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculemos la matriz inversa de A^n: $\left| A^n \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists \left(A^n\right)^{-1}$

$$\left(\text{Adj } A^n\right) = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\text{Adj } A^n\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(A^n\right)^{-1} = \frac{\left(\text{Adj } A^n\right)^t}{\left| A^n \right|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $P(0) = \alpha \Rightarrow a = \alpha$
$P(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$
$P(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$

Para que haya un único polinomio, el sistema tiene que ser compatible determinado y no ser homogéneo (pues en este caso se tendrá $a = b = c = 0$)

Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ rg A $= 3 \;\Rightarrow\;$ rg B $= 3 \;\Rightarrow\;$ el sistema es compatible determinado $\forall\, \alpha$.

Y para que el sistema no sea homogéneo, debe ser $\alpha \neq 0$.

Es decir, existe un único polinomio $P(x)$, $\forall\, \alpha \neq 0$.

2. GEOMETRÍA

Opción A

Sean los vectores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, $\vec{w} = (3, -2, 5)$; calcular:

a) *[0,5 puntos]* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.
b) *[0,5 puntos]* $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w})$.
c) *[0,75 puntos]* La ecuación del plano que pasa por el punto $P(0, 0, 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{u}$.
d) *[0,75 puntos]* El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCIÓN.

a) $\vec{v} + \vec{w} = (1, 0, 6) \;\Rightarrow\; \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 1 + 0 + 18 = 19$

b) $\vec{v} - \vec{w} = (-5, 4, -4) \;\Rightarrow\; \vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 15\vec{j} + 4\vec{k} - 5\vec{k} + 4\vec{j} - 12\vec{i} = (-8, -11, -1)$

c) Si el vector $\vec{u}$ es normal al plano, la ecuación de éste es $x - y + 3z + D = 0$ y como contiene al punto P:

$0 - 0 + 3 + D = 0 \;\Rightarrow\; D = -3 \;\Rightarrow\;$ la ecuación del plano es: $x - y + 3z - 3 = 0$

d) De la definición del producto escalar de dos vectores, se obtiene: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\,\vec{u}\,|\,|\,\vec{v}\,| \cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\,\vec{u}\,|\,|\,\vec{v}\,|} =$

$$= \frac{-2 - 2 + 3}{\sqrt{1+1+9} \cdot \sqrt{4+4+1}} = -\frac{1}{\sqrt{99}} = -\frac{1}{3\sqrt{11}} = -\frac{\sqrt{11}}{33} \;\Rightarrow\; \alpha = 95^{\circ}\ 46'\ 5.45''$$

Opción B

a) *[1 punto]* Estudiar la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x - 2y - z = 3$.

b) *[1,5 puntos]* Considerar la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases}$. Analizar si el punto $P(6, 2, 2)$ se halla o no sobre la recta paralela a la anterior que pasa por el origen.

SOLUCIÓN.

a) Puesto que los coeficientes no son proporcionales: $\dfrac{1}{1} = \dfrac{-2}{-2} \neq \dfrac{1}{-1} \;\Rightarrow\;$ los planos son secantes (tienen por intersección una recta)

b) Obtengamos dos puntos de r:

$$\begin{cases} x-y=1+3z \\ x-3y=5-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1+3z \\ -x+3y=-5+z \end{cases} \Rightarrow \quad 2y=-4+4z \quad \Rightarrow \quad y=-2+2z \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x=1+3z+y=1+3z-2+2z=-1+5z$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para } z=0: \quad y=-2 \quad , \quad x=-1 \quad \Rightarrow \quad Q\left(-1\,,-2\,,0\right) \\ \text{Para } z=1: \quad y=0 \quad , \quad x=4 \quad \Rightarrow \quad R\left(4\,,0\,,1\right) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QR}=\left(5\,,2\,,1\right)$$

Puesto que $\overrightarrow{QR}=\left(5\,,2\,,1\right)$ y $\overrightarrow{OP}=\left(6\,,2\,,2\right)$ no tienen la misma dirección (sus coordenadas no son proporcionales), el punto P no está en una recta paralela a r que pase por O.

3. ANÁLISIS

Opción A

1. a) *[1,25 puntos]* Calcular los siguientes límites: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{12x^2\sqrt{x^2-7x}}{\sqrt{9x^6+5x}}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{sen} x\right)^{1/x}$.

b) *[1,25 puntos]* Obtener $\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} x\cos(x^2)\,dx$

SOLUCIÓN.

a) ▪ $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{12x^2\sqrt{x^2-7x}}{\sqrt{9x^6+5x}}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{12x^2\sqrt{x^2}}{\sqrt{9x^6}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{12x^3}{3x^3}\right)=4$$

▪ $$\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{sen} x\right)^{1/x}=1^{\infty}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{sen} x-1\right)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\operatorname{sen} x-1}{x}}=(1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\operatorname{sen} x-1}{x}=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x+\cos x}{1}=1 \quad \text{y, por tanto:} \quad (1)\quad \lim_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{sen} x\right)^{1/x}=e$$

b) $$\int x\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int 2x\,\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x^2\right)$$

$$\int_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}} x\cos(x^2)\,dx=\left[\frac{\operatorname{sen}\left(x^2\right)}{2}\right]_{\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\sqrt{x}}=\frac{\operatorname{sen} x}{2}-\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}=\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}=\frac{2\cos\frac{3x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{2}=\cos\frac{3x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}$$

2. Sea $f(x)=2x+\operatorname{sen}(2x)$

a) *[0,75 puntos]* Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.
b) *[1,25 puntos]* Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de extremos relativos.
c) *[0,5 puntos]* ¿Son los puntos $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{R}$, puntos de inflexión de $f(x)$?

SOLUCIÓN.

a) ▪ La función es continua por ser suma de dos funciones continuas $\Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales

- Asíntotas horizontales u oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+\operatorname{sen}(2x)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}{1} = 2$

NOTA: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 0$ pues $\left|\operatorname{sen}(2x)\right| \le 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[2x + \operatorname{sen}(2x) - 2x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\operatorname{sen}(2x)\right] \text{ que no existe.}$$

Por lo tanto, la función no tiene asíntotas.

b) $f'(x) = 2 + 2\cos(2x) = 0 \;\Rightarrow\; \cos(2x) = -1 \;\Rightarrow\; 2x = \pi + 2k\pi \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (puntos críticos)

f ' > 0 **f ' > 0** **f ' > 0** **f ' > 0** **f ' > 0**

! B/2 B/2 3B/2 5B/2

Entre cada dos puntos críticos, la derivada es siempre positiva por lo que la función es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

c) $f''(x) = -4\operatorname{sen}(2x) \;\Rightarrow\; f''\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = -4\operatorname{sen}(\pi + 2k\pi) = 0$ (anulan a la segunda derivada)

$f'''(x) = -8\cos(2x) \;\Rightarrow\; f'''\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = -8\cdot\cos(\pi + 2k\pi) = 8 \neq 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ son puntos de inflexión

Opción B

1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$

a) *[0,5 puntos]* Determinar su dominio.
b) *[0,75 puntos]* Estudiar si $f(x)$ es una función simétrica respecto al origen de coordenadas.
c) *[1,25 puntos]* Obtener el área encerrada por $f(x)$ y el eje OX entre $x = \dfrac{1}{4}$ y $x = \dfrac{3}{4}$.

SOLUCIÓN.

a) $x - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x(1-x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0\ ,\ x = 1 \;\Rightarrow\; D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b) $f(-x) = \dfrac{1}{-x - x^2} \neq -f(x) \;\Rightarrow\;$ no es simétrica respecto al origen de coordenadas

c) La función no se anula por lo que no corta al eje OX. Por tanto: $S = \displaystyle\int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{x - x^2}\,dx = (1)$

$$\frac{1}{x-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A - Ax + Bx}{x(1-x)} = \frac{(-A+B)x + A}{x - x^2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} -A + B = 0 \;\Rightarrow\; B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x-x^2}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx = \ln x - \ln(1-x) = \ln\frac{x}{1-x}$$

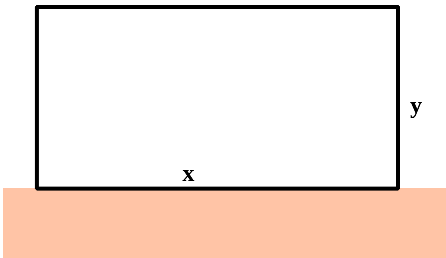
$$(1) = \left[\ln\frac{x}{1-x}\right]_{1/4}^{3/4} = \ln\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} - \ln\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \ln 3 - \ln\frac{1}{3} = \ln 3 - \ln 1 + \ln 3 = 2\ln 3 = \ln 9 \simeq 2{,}197\ u^2$$

2. a) *[1,25 puntos]* Queremos vallar un campo rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 5 euros/m y la de los otros tres lados, 0,625 euros/m. Hallar el área del campo de mayor superficie que podemos cercar con 1800 euros.

b) *[1,25 puntos]* Calcular para qué valores de *a* y *b* la función $\begin{cases} x+1 & x \le -1 \\ a+x^2 & -1 < x < 1 \\ (b-x)^2 & x \ge 1 \end{cases}$ es continua.

SOLUCIÓN.

a) Se tiene: $5x + 0,625(x+2y) = 1800 \;\Rightarrow\; 5,625x + 1,25y = 1800 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{1800 - 5,625x}{1,25} = 1440 - 4,5x$



La función que debe ser máxima es: $f(x) = x \cdot y = 1440x - 4,5x^2$

$f'(x) = 1440 - 9x = 0 \;\Rightarrow\; x = 160$ (valor crítico)

y como $f''(x) = -9 < 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ es máxima.

Por tanto: $x = 160 \text{ m}\ ,\ y = 720 \text{ m} \;\Rightarrow\; S = 115200 \text{ m}^2$

b) Como las funciones que están definidas en cada uno de los trozos son polinómicas, son continuas. Habrá que exigir la continuidad en $x = -1$ y en $x = 1$:

- Para que la función sea continua en $x = -1$: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to -1}(x+1) = \lim\limits_{x\to -1}(a+x^2) \;\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow\; 0 = a+1 \;\Rightarrow\; a = -1$

- Para que la función sea continua en $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to 1}(-1+x^2) = \lim\limits_{x\to 1}(b-x)^2 \;\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow\; 0 = (b-1)^2 \;\Rightarrow\; b-1 = 0 \;\Rightarrow\; b = 1$