OPCIÓN A

1. *Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales* $\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$. *Se pide hallar X e Y* [1 punto] *y calcular si tiene sentido* X^{-1} *e* Y^{-1} *(razonar la posible respuesta negativa)* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

• Multiplicamos por 2 la primera ecuación y las sumamos:

$$\begin{cases} 4X - 2Y = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 5X = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = 2X - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• No existe X^{-1} porque $|X| = 0$. En cambio sí existe Y^{-1} porque $|Y| = 1 \neq 0$.

Calculemos Y^{-1}: $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to Y^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to Adj\left(Y^t\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to Y^{-1} = \dfrac{Adj\left(Y^t\right)}{|Y|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. *Se define la función f del modo siguiente:* $f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

Encontrar los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas [1 punto]. *Estudiar su derivabilidad* [1 punto] *y hallar los puntos de su gráfica en los que la tangente es paralela al eje OX* [0,5 puntos]. *(NOTA: ln significa logaritmo neperiano).*

SOLUCIÓN.

• Si la gráfica pasa por el origen de coordenadas: $f(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

Para que la función sea continua, debe serlo en x = 1 y para ello debe ser $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$:

$$\lim_{x \to 1}\left(2x^2 + ax\right) = \lim_{x \to 1}\left(\ln x - 1\right) \Rightarrow 2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$$

• La función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 1 \\ 4x - 3 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$ que existe $\forall x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Veamos si $f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right)$:

$f'\left(1^-\right) = 4 \cdot 1 - 3 = 1$ *y* $f'\left(1^+\right) = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow f'\left(1^-\right) = f'\left(1^+\right)$ y, por tanto, la función es derivable $\forall x$.

• Si la tangente es paralela a OX, su pendiente es 0 y por tanto $f'(x) = 0$. La derivada sólo se anula cuando $4x - 3 = 0$ $\Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$. El punto de la gráfica en el que la tangente es paralela al eje OX es por tanto $\left(\dfrac{3}{4}, -\dfrac{9}{8}\right)$.

3. *Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las funciones* $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$ *e* $y = 8x$ [1 punto]. *Hallar el área de este recinto* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

• La función $y = \dfrac{1}{x^2}$ tiene al eje de ordenadas, $x = 0$, como asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$ y además:

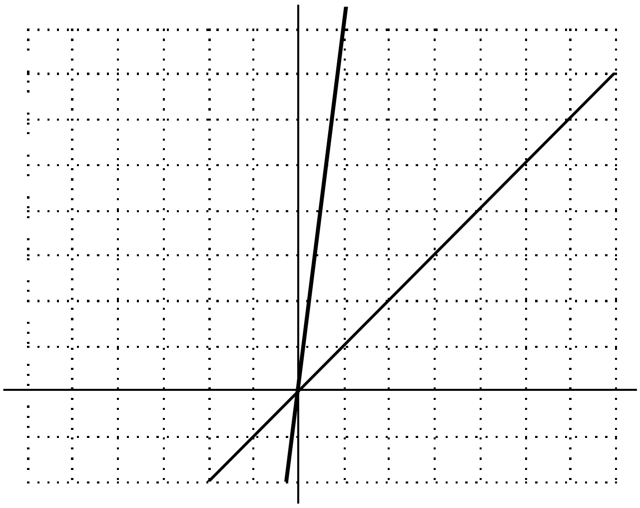
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

El eje de abscisas, $y = 0$, es una asíntota horizontal de la función pues $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ y además: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0^+$

La función es positiva $\forall x$, simétrica respecto al eje OY pues $f(x) = f(-x)$, pasa por los puntos $(-1,1)$ y $(1,1)$, $\left(-2, \dfrac{1}{4}\right)$ y $\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, 4\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, 4\right)$, …

• La recta $y = x$ es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Corta a $y = \dfrac{1}{x^2}$ en el punto $(1,1)$.

• La recta $y = 8x$ pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,8)$. Corta a $y = \dfrac{1}{x^2}$ en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, 4\right)$



• Área del recinto. Lo calcularemos por partes:

(1) Área del triángulo limitado por el eje de abscisas y la recta $y = 8x$ entre las abscisas $x = 0$ y $x = \dfrac{1}{2}$:

$$A_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 = 1 \text{ u}^2$$

(2) Área limitada por la función $y = \dfrac{1}{x^2}$, el eje OX y las abscisas $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = 1$:

$$A_2 = \int_{1/2}^{1} x^{-2}\,dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{1/2}^{1} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1/2}^{1} = -1 + 2 = 1 \text{ u}^2$$

(3) Área del triángulo limitado por OX y la recta $y = x$ entre las abscisas $x = 0$ y $x = 1$:

$$A_3 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

El área del recinto es $A_1 + A_2 - A_3 = 1 + 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ u^2

4. *Nos dan la recta r determinada por los puntos A (1, 1, 1) y B (3, 1, 2) y la recta s dada por* $\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$. *Se pide:*

i) *Averiguar su posición relativa.* [1 punto]
ii) *Si existe, hallar la ecuación general del plano que las contiene.* [1,5 puntos]

SOLUCIÓN.

Dos puntos de r están dados y un vector direccional de la recta es: $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1)$

Obtengamos dos puntos de la recta s: $\left.\begin{array}{l} x = 2z + 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z = 0: \; x = 1, y = 2 \;\Rightarrow\; P(1, 2, 0) \\ z = 1: \; x = 3, y = 2 \;\Rightarrow\; Q(3, 2, 1) \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2, 0, 1)$

i) Puesto que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{PQ} \Rightarrow$ las rectas son paralelas o coincidentes. Como el punto A de r no pertenece a s (la coordenada "y" debería ser 2), las rectas son paralelas.

ii) Sea $X(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano que contiene a r y s. Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP} = (0, 1, -1)$ y $\overrightarrow{AX} = (x-1, y-1, z-1)$ son linealmente dependientes por estar contenidos en un mismo plano. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\cdot(z-1) + 2\cdot(y-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow 2z - 2 + 2y - 2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 3 = 0$$

OPCIÓN B

1. *Discutir según el valor del parámetro a el sistema lineal* $\begin{cases} \text{ax} + 7\text{y} + 20\text{z} = 1 \\ \text{ax} + 8\text{y} + 23\text{z} = 1 \\ \text{x} - \text{az} = 1 \end{cases}$ [1,5 puntos] *y resolverlo en los casos en que tenga infinitas soluciones* [1 punto].

SOLUCIÓN.

La matriz de los coeficientes, A, y la matriz ampliada, M, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 20 & 1 \\ a & 8 & 23 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 1 \end{array}\right)$

El único menor de orden 3 de A es: $\begin{vmatrix} a & 7 & 20 \\ a & 8 & 23 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -8a^2 + 161 - 160 + 7a^2 = -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

• Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$: $rg\ A = rg\ M = 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

• Si $a = -1$: puesto que el menor $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 7 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 2$. Veamos cuál es el rango de M. Orlamos el menor que da rango a A con los términos independientes: $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 7 - 8 + 7 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\ M = 3$

Como $rg\ A \neq rg\ M \Rightarrow$ el sistema es incompatible

• Si $a = 1$: puesto que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 7 = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\ A = 2$. Veamos cuál es el rango de M. Orlamos el menor que da rango a A con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg\ M = 2$

Puesto que $rg\ A = rg\ M = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

• Resolvamos el sistema en este último supuesto, es decir cuando $a = 1$:

Utilizaremos las dos primeras ecuaciones con "x" e "y" como incógnitas principales y "z" como parámetro ($z = \lambda$)

$$\left.\begin{array}{l} x + 7y = 1 - 20\lambda \\ x + 8y = 1 - 23\lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -x - 7y = -1 + 20\lambda \\ x + 8y = 1 - 23\lambda \end{array}\right\} \text{ Sumando: } y = -3\lambda \Rightarrow x = 1 - 20\lambda + 21\lambda = 1 + \lambda$$

Luego las soluciones son: $x = 1 + \lambda$, $y = -3\lambda$, $z = \lambda$

2. *De la función* $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ *nos piden:*

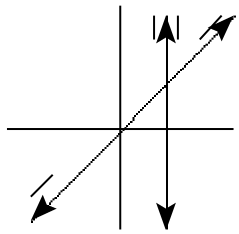
i) *Dominio de definición y asíntotas.* [1 punto]
ii) *Máximos y mínimos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.* [1 punto]
iii) *Representación gráfica.* [0,5 puntos]

SOLUCIÓN.

i) • $D = \mathbb{R} - \{1\}$

• $x = 1$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x\to 1}\left(x + \dfrac{4}{(x-1)^2}\right) = \infty$.

Además: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x + \dfrac{4}{(x-1)^2}\right) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x + \dfrac{4}{(x-1)^2}\right) = +\infty$



• $y = x$ es una asíntota oblicua de la función.
Posición relativa de la curva respecto a la asíntota:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4}{(x-1)^2}\right) = 0^+ \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4}{(x-1)^2}\right) = 0^+$$

ii) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2} = x + 4\cdot(x-1)^{-2} \;\Rightarrow\; y' = 1 - 8\cdot(x-1)^{-3} = 1 - \dfrac{8}{(x-1)^3} = 0 \;\Rightarrow\; 1 = \dfrac{8}{(x-1)^3} \;\Rightarrow\; (x-1)^3 = 8 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x - 1 = 2 \;\Rightarrow\; x = 3$ (punto crítico)

$y'' = 24\cdot(x-1)^{-4} = \dfrac{24}{(x-1)^4} > 0 \;\; \forall x \;\Rightarrow$ la función tiene un mínimo relativo en $x = 3$: $(3\,,4)$

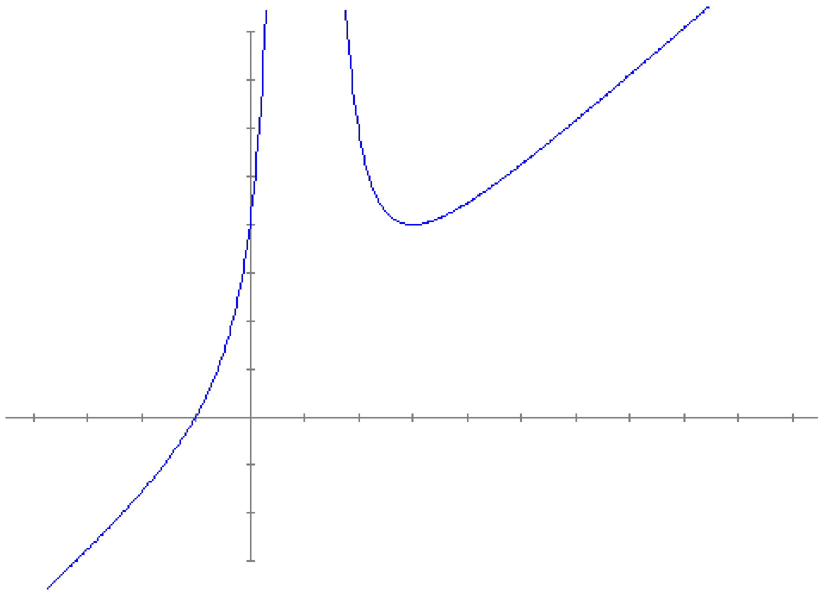
Intervalos de crecimiento y decrecimiento: la primera derivada tiene cambios de signo en $x = 1$ y $x = 3$:

$y' > 0$	1	$y' < 0$	3	$y' > 0$

La función es creciente en $(-\infty\,,1)\cup(3\,,+\infty)$

La función es decreciente en $(1\,,3)$

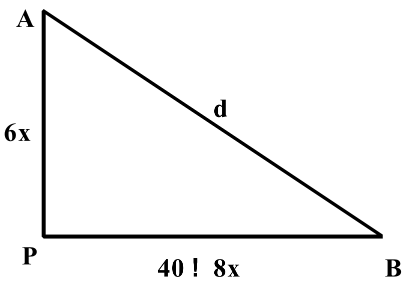
iii) Representación gráfica. Además de los datos ya obtenidos, la gráfica pasa por los puntos $(-1\,,0)$ y $(0\,,4)$:



3. *El barco A abandona un puerto a las 0 horas y navega directamente hacia el norte a la velocidad constante de 6 nudos. El barco B se encuentra a las 0 horas a 40 millas marinas al este del puerto y navega en dirección a dicho puerto a la velocidad constante de 8 nudos. ¿Cuándo se hallarán estos barcos lo más próximos el uno del otro? (Dar el resultado en horas y minutos).* [2,5 puntos]
NOTA: un nudo es una milla marina por hora.

SOLUCIÓN.

Sea x el tiempo (en horas) transcurrido desde las 0 horas. Al cabo de x horas, el barco A está a $6x$ millas del puerto P y el barco B a $40-8x$ millas de P. La distancia entre ambos barcos es:



$$d=\sqrt{(6x)^2+(40-8x)^2}=\sqrt{36x^2+1600-640x+64x^2}=$$

$$=\sqrt{100x^2-640x+1600}$$

Se trata de averiguar el valor de x que hace mínima esta distancia:

$$d'=\frac{200x-640}{2\sqrt{100x^2-640x+1600}}=\frac{100x-320}{\sqrt{100x^2-640x+1600}}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 100x-320=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{32}{10}=\frac{16}{5} \quad \text{(valor crítico)}$$

$$d''=\frac{100\cdot\sqrt{100x^2-640x+1600}-(100x-320)\cdot\dfrac{200x-640}{2\sqrt{100x^2-640x+1600}}}{100x^2-640x+1600}$$

y para $x=\frac{16}{5}$: $d''\left(\frac{16}{5}\right)=\frac{100\cdot\sqrt{1024-2048+1600}-0}{1024-2048+1600}=\frac{100\cdot\sqrt{576}}{576}=\frac{2400}{576}>0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{16}{5}$ hace mínima d.

Por tanto, los barcos estarán a una distancia mínima cuando hayan transcurrido $\frac{16}{5}$ horas, es decir a las 3 h 12 min.

4. *Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene centro C (!1, 1) y es tangente a la recta 3x – 4y – 3 = 0* [1 punto]. *De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encontrar las que sean tangentes a esta circunferencia* [1,5 puntos].

SOLUCIÓN.

• Puesto que la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia, calculemos la ecuación de la recta perpendicular a la tangente que pasa por C:

La pendiente de la tangente es $\frac{3}{4}$ luego la pendiente de una perpendicular es $-\frac{4}{3}$. La ecuación del radio es entonces:

$$y-1=-\frac{4}{3}(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad 3y-3=-4x-4 \quad\Leftrightarrow\quad 4x+3y+1=0$$

El punto de corte del radio y la tangente es:

$$\left.\begin{array}{l}4x+3y+1=0\\ 3x-4y-3=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}16x+12y+4=0\\ 9x-12y-9=0\end{array}\right\} \; sumando:\; 25x=5 \Rightarrow x=\frac{1}{5} \quad , \quad y=\frac{-\frac{4}{5}-1}{3}=-\frac{9}{15}=-\frac{3}{5}:\; P\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

Entonces: $r = d\,(C\,,P) = \sqrt{\left(\frac{1}{5}+1\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25}+\frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = 2$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

• La recta perpendicular a $y = x$ que pasa por C es: $y - 1 = -1\,(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad y - 1 = -x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x$

Cortamos esta recta y la circunferencia:

$$\left.\begin{array}{c} y = -x \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad x^2 + x^2 + 2x + 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}\ .$$

Los puntos de tangencia son: $\left(-1+\sqrt{2}\,,1-\sqrt{2}\right)$ y $\left(-1-\sqrt{2}\,,1+\sqrt{2}\right)$ y las rectas paralelas a $y = x$ que pasan por dichos puntos son:

$y - 1 + \sqrt{2} = x + 1 - \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \quad ; \quad y - 1 - \sqrt{2} = x + 1 + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2 + 2\sqrt{2} = 0$