

OPCIÓN A

1. A primera hora de la mañana en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10, 20 y 50 euros) con un valor total de 16000 euros. Sabiendo que por cada 3 billetes de 50 euros son necesarios 4 de 20, plantee un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber y resuélvalo por el método de Gauss. (3,5 puntos)

SOLUCIÓN.

Sea x el número de billetes de 10 €, y el de billetes de 20 € y z el de billetes de 50 €. Se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ 10x + 20y + 50z = 16000 \\ \frac{z}{y} = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ x + 2y + 5z = 1600 \\ 3y - 4z = 0 \end{array} \right\} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 800 \\ 3y - 4z = 0 \end{array} \right\} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 800 \\ y + 4z = 800 \\ -16z = -2400 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $E_2 - E_1$ (2) $E_3 + 3E_2$

$z = 150$; $y = 200$; $x = 450$ es decir, habrá 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 50 €.

2. a) Derive las funciones $f(x) = \frac{x^2}{3x^2 + 1}$, $g(x) = x(5 - x^2)^4$, $h(x) = 5\sqrt{\ln x}$ (1,5 puntos)

b) La oferta de un bien conocido su precio, p , es $S(p) = \begin{cases} 30p + 200 & \text{si } 0 \leq p \leq 10 \\ p^2 - 60p + 1000 & \text{si } 10 < p \leq 40 \end{cases}$. Representela y a la vista de su gráfica, diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima oferta y para cuáles la oferta es menor que 200 unidades. (2 puntos)

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = \frac{2x \cdot (3x^2 + 1) - x^2 \cdot 6x}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{6x^3 + 2x - 6x^3}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(3x^2 + 1)^2}$

$g'(x) = (5 - x^2)^4 + x \cdot 4(5 - x^2)^3 \cdot (-2x) = (5 - x^2)^4 - 8x^2(5 - x^2)^3 = (5 - x^2)^3 \cdot (5 - x^2 - 8x^2) = (5 - x^2)^3 \cdot (5 - 9x^2)$

$h'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$

b) En el intervalo $[0, 10]$ la función es una recta, $S(p) = 30p + 200$, que pasa por los puntos: $(0, 200)$ y $(10, 500)$

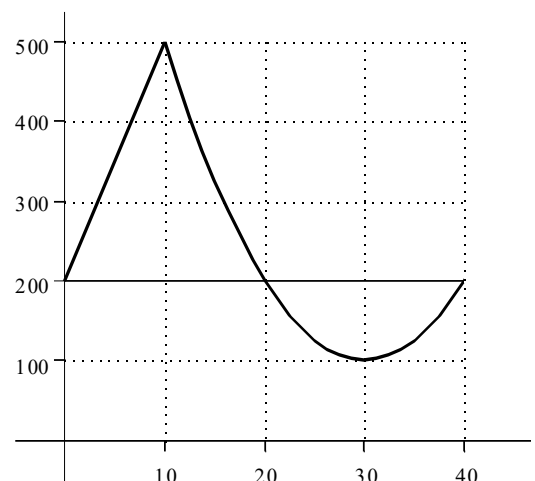
En el intervalo $(10, 40]$ la función es una parábola:

$S(p) = p^2 - 60p + 1000$. Calculemos su vértice:

$S'(p) = 2p - 60 = 0 \Rightarrow p = 30$, $S(30) = 100 \Rightarrow V(30, 100)$.

Además pasa por los puntos: $(20, 200)$ y $(40, 200)$.

La gráfica es entonces (ver dibujo a la derecha):



La máxima oferta se alcanza para un precio de 10 u y la mínima para un precio de 30 u.

La oferta es menor que 200 unidades para un precio comprendido entre 20 y 40 unidades monetarias.

3. En un barrio hay dos institutos, en el primero el 60% de los alumnos estudia inglés y en el segundo el 45% no lo estudia. Se sortea un viaje a Londres en cada uno de los institutos, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) Los dos alumnos agraciados no estudian inglés. (1 punto)
- b) Sólo estudia inglés el del primer instituto. (1 punto)
- c) Al menos uno estudia inglés. (1 punto)

SOLUCIÓN.

Sea I_1 el suceso “el alumno del primer instituto estudia inglés” e I_2 el suceso “el alumno del segundo instituto estudia inglés”. Se tiene: $p(I_1) = 0,6$ y $p(I_2) = 0,55$ y ambos sucesos son independientes.

a) $p(\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2) = p(\bar{I}_1) \cdot p(\bar{I}_2) = 0,4 \cdot 0,45 = 0,18$

b) $p(I_1 \cap \bar{I}_2) = p(I_1) \cdot p(\bar{I}_2) = 0,6 \cdot 0,45 = 0,27$

c) El suceso “al menos uno estudia inglés” es el contrario del suceso “ninguno estudia inglés” cuya probabilidad se ha obtenido en el apartado a). Por tanto: $p = 1 - 0,18 = 0,82$

OPCIÓN B

1. Un camionero transporta dos tipos de mercancías, X e Y, ganando 60 y 50 euros por tonelada respectivamente. Al menos debe transportar 8 toneladas de X y como mucho el doble de cantidad que de Y. ¿A cuánto asciende su ganancia total máxima si dispone de un camión que puede transportar hasta 30 toneladas? (3,5 puntos)

SOLUCIÓN.

Organicemos los datos del problema en una tabla:

Tipo de mercancía	Nº de toneladas	Ganancias
X	x	60x
Y	y	50y
	$x \geq 8$ $x \leq 2y$ $x + y \leq 30$	$F(x, y) = 60x + 50y$

X La función objetivo, que debe ser máxima, es:

$$F(x, y) = 60x + 50y$$

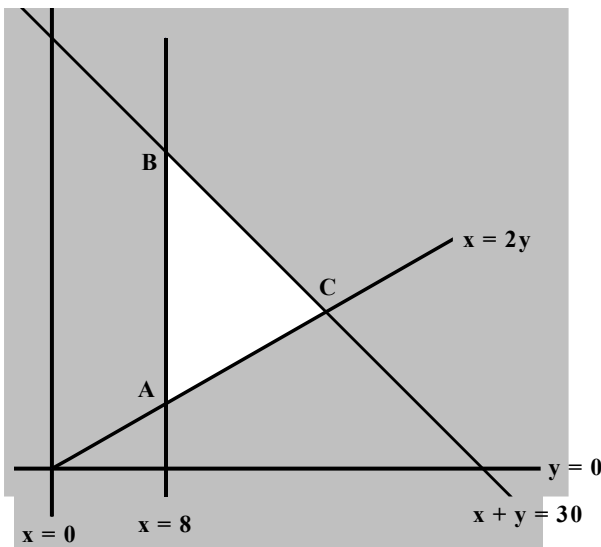
X Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 8 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{cases}$$

X Dibujemos la región factible, es decir la solución del sistema de inecuaciones (en cada inecuación se ensombrece el semiplano que no es solución de la misma):

- El semiplano solución de la inecuación $x \geq 0$ está incluido en el semiplano solución de $x \geq 8$ que es el que se encuentra a la derecha de la recta $x = 8$.
- El semiplano solución de la inecuación $y \geq 0$ es el que está por encima del eje de abscisas.
- El semiplano solución de la inecuación $x \leq 2y$ es el que contiene al punto $(0, 1)$ por ejemplo.
- El semiplano solución de la inecuación $x + y \leq 30$ es al que pertenece el origen de coordenadas.

Por tanto, la región factible es el triángulo ABC:



La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos pues las coordenadas de los vértices y el valor de la función objetivo en los mismos:

Vértice A:

$$\left. \begin{array}{l} x = 8 \\ x = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow A(8, 4) \Rightarrow F(8, 4) = 680$$

Vértice B:

$$\left. \begin{array}{l} x = 8 \\ x + y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow B(8, 22) \Rightarrow F(8, 22) = 1580$$

Vértice C:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x + y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow C(20, 10) \Rightarrow F(20, 10) = 1700$$

Es decir, la ganancia total máxima es de 1700 euros que conseguirá transportando 20 toneladas de X y 10 toneladas de Y.

2. a) Derive las funciones $f(x) = \frac{x}{6} - 8x^2 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, $h(x) = x e^{3x}$ (1,5 puntos)

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $f(x)$ y calcule los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de dicha función. (2 puntos)

SOLUCIÓN.

$$a) f'(x) = \frac{1}{6} - 16x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 96x^3 - 6}{6x^2} = \frac{-96x^3 + x^2 - 6}{6x^2} ; \quad g'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$h'(x) = e^{3x} + x \cdot e^{3x} \cdot 3 = e^{3x} (3x + 1)$$

b) X La función $f(x)$ está formada por la suma de tres funciones más simples: $f_1(x) = \frac{x}{6}$, $f_2(x) = -8x^2$ y $f_3(x) = \frac{1}{x}$.

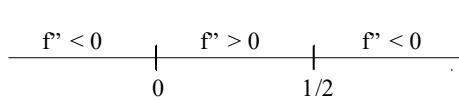
El dominio de las dos primeras es \mathbb{R} y el de la tercera es $\mathbb{R} - \{0\}$. La función $f(x)$ tiene por dominio la intersección de los dominios de las tres funciones y, por tanto, es: $\mathbb{R} - \{0\}$.

X Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = -16 - \frac{-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} - 16$$

$$\frac{2}{x^3} - 16 = 0 \Rightarrow 2 - 16x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{luego la segunda derivada puede tener un cambio de signo}$$

en $x = \frac{1}{2}$. Como además en $x = 0$ la función no está definida, también debemos considerar la posibilidad de que haya en él un cambio de signo. En definitiva, tenemos:



Por tanto, la función es convexa en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y cóncava en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

De los dos puntos donde la segunda derivada cambia el signo, el único que es un punto de inflexión es $x = \frac{1}{2}$ (la función pasa de cóncava a convexa). Aunque en $x = 0$ también hay un cambio de signo de la segunda derivada, no se trata de un punto de inflexión de la función pues no pertenece al dominio de la misma.

3. *El número medio de veces que una persona de una determinada ciudad utiliza mensualmente el transporte público tiene una desviación típica igual a 20. Determine el número mínimo de personas que se han de elegir para obtener un intervalo en el que estará la media, con un nivel de confianza del 95% y con un radio no mayor que 1,4. Explique los pasos realizados para obtener el resultado. (3 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se trata de hallar el tamaño de la muestra necesaria para estimar la media μ en una población cuya desviación típica es $\sigma = 20$ con un error máximo admisible de $E = 1,4$ y un nivel de confianza del 95%. Se tiene:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1,96$ (se puede obtener también de la tabla) y por tanto:

$$n = \left(\frac{1,96 \cdot 20}{1,4} \right)^2 = 784$$

Es decir, se necesita un mínimo de 784 personas para estimar la media en las condiciones fijadas.